ANTONIO TRAJANO

ALGEBRA ELEMENTAR

Muito mais desenvolvida e exemplificada que todas as edições precedentes, e devidamente ampliadâ com materia nova de summa importancia

$$x^2 + 2px = q$$

$$x^2 + 2px + p^2 = q + p^2$$

$$x + p = \pm\sqrt{q + p^2}$$

$$x' = -p + \sqrt{q + p^2}$$

$$x'' = -p - \sqrt{q + p^2}$$

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO
49-A, Rua Libero Badaró

BELLO HORIZONTE
Rua da Bahia, 1052

Extracto do Catalogo da Livraria Francisco Alves

Exame de Admissão para os Gymnasios — (Portuguez — Historia do Brasil — Geographia — Arithmetica — Desenho e Morphologia Geometrica — Sciencias Physicas e Naturaes, pelos professores João Ribeiro e Raja Gabaglia ... 6$000

Algebra (Elementos de), pelo Dr. José Joaquim de Queiroz, professor da Escola Normal do Districto Federal. 1 vol. cart. ... 4$000

Algebra, por C. B. Ottoni, augmentada com muitas notas intercaladas no texto, por G. S. M. 1 vol. de 376 pags., cart. ... 4$000

Algebra Elementar, curso theorico e pratico, incluindo as equações do 2.º grão e progressões, por Antonio Trajano. 1 vol. cart. ... 5$000

Chave da Algebra Elementar, por Antonio Trajano. 1 vol. br. ... 2$000

Algebra Elementar — Theorica e pratica, de accordo com os programmas dos cursos secundarios, por S. L. (Dr. Sá Lobão). 1 vol. in-8°, com 281 paginas nitidamente impressas, cart. ... 8$000

Algebra Elementar, por Sebastião Francisco Alves. 1 vol. in-8°, cart. ... 12$000

Exercicios de Algebra, por H. Costa, Euclides Roxo e O. Castro (Do Collegio Pedro II). 1 vol. in-8°, br. ... 5$000

Geometria applicada, Theoria das sombras — Theoria das imagens brilhantes — Perspectiva linear, por Carlos Sampaio, lente da Escola Polytechnica do Rio de Janeiro. 1 vol., br. 4$, enc. ... 6$000

Curso de Geometria, por Timotheo Pereira, obra adoptada no Collegio Pedro II. 1 vol. in-8°, cart. 10$000

Exercicios de Geometria, por H. Costa — Euclides Roxo — O. Castro (Do Collegio Pedro II). 1 vol. br. ... 5$000

Problemas de Geometria, de accôrdo com o programma official, com numerosos problemas propostos em prova escripta no Collegio Pedro II, por Isaac Izecksohn e Lyon Davidovich, com um prefacio do Dr. Henrique Costa. 1 vol. cart. ... 5$000

Mappa de Figuras Geometricas, apparelhado em páu e collado em tela ... 25$000

Exercicios de **Expressões Fraccionarias**, por O. de Souza Reis. 1 vol. enc. ... 5$000

Pesos e Medidas e Tabellas das moedas nacionaes e estrangeiras, etc., por Othello de Souza Reis. 1 vol. br. ... 1$500

Exercicios de Trigonometria, por H. Costa-Euclides Roxo-O. Castro (Do Collegio Pedro II). 1 volume br. ... 5$000

ALGEBRA ELEMENTAR

OBRAS DO MESMO AUTOR

Arithmetica Primaria para meninos e meninas que começam o estudo de Arithmetica nas escolas primarias, contendo todo o ensino exposto em lições perfeitamente graduadas, e acompanhadas de numerosos exercicios, problemas e figuras para tornar o estudo de Arithmetica mais attractivo ás crianças $500

Arithmetica Elementar Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica que deve ser ensinada nas aulas primarias. Obra premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, approvada e adoptada unanimemente pelo Conselho Superior da Instrucção Publica da Capital Federal, cartonada. 2$000

Arithmetica Progressiva, curso completo theorico e pratico de Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os esclarecimentos uteis sobre este importante ramo da sciencia, obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus e outros estabelecimentos de educação superior, refundida, ampliada e completa, cartonada................ 5$000

Algebra elementar, contendo um curso theorico e pratico deste importante ramo das mathematicas, incluindo equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo tão simples e facil que dispensa o auxilio do professor, cartonada....... 5$000

Nova Chave de Arithmetica Progressiva....... 1$000

Nova Chave da Algebra Elementar. Esta Chave dá a solução completa de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elementar, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina........ 2$000

Estudo da Lingua Vernacula, contendo o ensino methodico e consecutivo de etymologia, prosodia e orthographia, exposto por um systema novo, gradualmente desenvolvido e exemplificado, e que dá todo o esclarecimento preciso para o conhecimento aperfeiçoado destas materias, 1 vol. cart....... 2$000

ALGEBRA ELEMENTAR

CONTENDO UM CURSO THEORICO E PRATICO DESTE RAMO DA SCIENCIA
INCLUINDO AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E PROGRESSÕES,
EXPOSTO POR UM METHODO FACILIMO,
SIMPLES E MUITO COMPREHENSIVEL

PELO PROFESSOR

ANTONIO TRAJANO

Auctor da Arithmetica Primaria, Arithmetica Elementar
e Arithmetica Prgressiva Superior

15.ª EDIÇÃO

CUIDADOSAMENTE REVISTA

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro
S. Paulo — 49-A, Rua Libero Badaró | Bello Horizonte — Rua da Bahia, 1052
1932

Obras do professor Antonio Trajano

PARA O ENSINO DE MATHEMATICAS:

Arithmetica Primaria para os meninos e meninas que começam o estudo de Arithmetica nas escolas primarias; contendo as quatro operações sobre numeros inteiros e fracções, expostas do modo mais simples, por meio de lições graduadas, e acompanhadas de exercicios e problemas proprios para o primeiro tirocinio do calculo.

Arithmetica Elementar Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica que deve ser ensinada nas aulas primarias, exposta por um methodo attractivo e deleitavel, e ornada de muitas gravuras adequadas ao texto. Obra premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, e adoptada pela instrucção publica em quasi todos os Estados do Brazil.

Arithmetica Progressiva, curso completo, theorico e pratico de Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os esclarecimentos uteis sobre este importante ramo da sciencia. Obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus e outros estabelecimentos de educação superior.

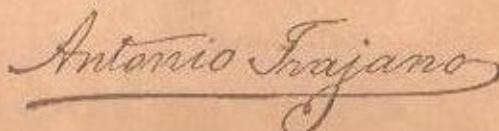
Chave da Arithmetica Progressiva. Esta obra contém a solução completa de todos os problemas difficeis da Arithmetica Progressiva; contém tambem a resposta de todos os exercicios e problemas que nesta Arithmetica não levam resposta; contém ainda alguns exercicios interessantes para serem propostos aos discipulos.

Com esta chave, qualquer professor poderá vantajosamente e sem difficuldade alguma leccionar pela **Arithmetica Progressiva,** certo de que não encontrará embaraço algum em todo o curso deste compendio.

Algebra Elementar, contendo um curso theorico e pratico deste ramo da sciencia, incluindo as equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo facilimo, simples e muito comprehensivel.

Chave da Algebra. Esta obra apresenta a solução de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elementar, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina.

Observação

Antonio Trajano

PREFACIO

Na Inglaterra, na França, na Allemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Algebra é considerada como um dos ramos mais uteis e interessantes da instrucção. Tal é a importancia que alli se dá a esta materia, que já foi incluida como parte do ensino obrigatorio nas escolas primarias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema em uma equação algebrica.

Calcula-se que mais de quatrocentos mil compendios de Algebra se consomem annualmente nos Estados Unidos, e isto é sufficiente para nos dar uma idéa do modo por que se aprecia e desenvolve este ramo de estudo naquella grande e adiantada nação americana.

Não ha alli ensino secundario ou superior de qualquer natureza que seja, que dispense o estudo acurado de Algebra; no emtanto, entre nós, nem mesmo nas faculdades de direito se exige o exame de Algebra como preparatorio para o estudo das sciencias sociaes e juridicas! E, se nestes estabelecimentos de educação superior se dá tão pouco apreço a esta disciplina, que fará nos lyceus e collegios onde nem mesmo Arithmetica se ensina com perfeição?

Para podermos avaliar como esta materia é abandonada, ou para melhor dizer, ignorada entre nós, bastará só reflectirmos que, se exceptuarmos os homens formados em qualquer dos ramos das mathematicas, será bem difficil acharmos em nossas cidades pessôas que tenham conhecimento de Algebra.

Felizmente já vemos signaes de grande melhoramento. O Estado de S. Paulo, que nestes ultimos annos tanto se tem avantajado, ao ponto de apresentar um desenvolvimento material e uma actividade que causam pasmo, chegado a este grau de engrandecimento, não póde supportar por mais tempo o systema atrazado e rotineiro de ensino que os seus antepassados lhe legaram, e por isso caba de fazer uma reforma completa na instrucção publica, introduzindo, entre outros melhoramentos, o ensino obrigatorio de Algebra nas escolas primarias.

Este exemplo será em breve seguido por outros Estados, e, em poucos annos, veremos a nossa mocidade aproveitar-se, com grande vantagem, da força dessa alavanca poderosa do calculo, chamada algebra.

Para ajudarmos a desenvolver o gosto por este estudo tão proveitoso, apresentamos agora este compendio, que pela sua simplicidade, clareza e methodo, muito contribuirá para despertar nos discipulos o interesse e gosto por esta materia que, ao mesmo tempo que é tão util para a vida, é tambem tão recreativa para o espirito.

Para tornarmos mais attractivo e ameno este estudo, abrandámos quanto foi possivel o rigor algebrico; empregamos em todo o livro uma linguagem simples e apropriada; exemplificamos todas as theorias, resolvendo todas as difficuldades, e illustrando cada ponto com numerosos exercicios e problemas interessantes e recreativos, e finalmente, abundamos em notas, explicações e referencias, porque sabemos que muitos daquelles que hão de estudar por este compendio, não terão outro explicador nem outro auxiliar além do livro que lhes servirá de mestre.

Aquelles que estudarem com attenção este pequeno curso de Algebra, não perderão o seu tempo, porque não sómente desenvolverão o seu raciocinio, e esclarecerão o seu espirito, mas ficarão tambem habilitados para resolver muitos calculos que, de modo algum, resolveriam só com o auxilio da Arithmetica.

ALGEBRA ELEMENTAR

1. Algebra é a parte das mathematicas que resolve os problemas, e demonstra os theoremas quando as quantidades são representadas por lettras.

2. Symbolos algebricos são lettras, numeros e signaes com que se exprimem as quantidades, e effectuam as operações.

3. Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se teem de obter por meio de quantidades conhecidas.

As quantidades conhecidas chamam-se **dados** do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se **incognitas**, e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas, chama-se **solução**.

4. As quantidades conhecidas são representadas pelas primeiras lettras do alphabeto: a, b, c, d, etc. As quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas lettras: x, y, z. Estas representações symbolicas teem o nome de **quantidades algebricas.**

Duas ou mais quantidades podem tambem ser representadas pela mesma lettra, mas neste caso é necessario distinguil-a com um ou mais accento ou linhas, como x', x'', x''', que se lê: x' primo, x'' segundo, x''' terceiro.

5. Theorema é uma proposição que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algebricas, e que póde tornar-se evidente por meio de uma demonstração.

6. Em Algebra, as quantidades determinadas são representadas pelos dez algarismos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

7. Os signaes algebricos teem por fim indicar abreviadamente as operações que se teem de effectuar, e mostrar alguma relação que ha entre as quantidades algebricas.

Os seguintes signaes teem em Algebra a mesma significação que em Arithmetica:

$+$ lê-se: *mais.*	$>$ lê-se: *maior do que.*
$-$ lê-se: *menos.*	$<$ lê-se: *menor do que.*
$\times$ lê-se: *multiplicado por* ou *vezes.*	$\sqrt{\ }$ lê-se: *raiz.*
$\div$ lê-se: *dividido por.*	:: lê-se: *está para.*
$=$ lê-se: *igual a.*	∞ lê-se: *infinito.*
$\pm$ lê-se: *mais ou menos.*	( ) Chama-se *parenthesis.*
	——— chama-se *vinculo.*

Explicação dos signaes algebricos

8. O signal $=$, escripto entre duas quantidades, mostra que estas quantidades são iguaes em valor. Assim, a expressão $a=3$, que se lê: *a igual a 3*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a é igual a 3, isto é, tem o valor de 3.

9. O signal $+$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser sommada com a primeira. Assim, $a+b$, que se lê: *a mais b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra b deve juntar-se com a quantidade representada pela lettra a. Se a fosse igual a 2, e b, igual a 3, o resultado da expressão seria: $a+b=2+3=5$.

10. O signal $-$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser subtrahida da primeira. Assim, $a-b$, que se lê: *a menos b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra b deve ser subtrahida da quantidade representada por a. Se a fosse igual a 5, e b igual a 3, o resultado seria: $a-b=5-3=2$.

11. O signal $+$ chama-se tambem signal positivo, e o signal $-$ chama-se signal negativo. Toda a quantidade algebrica deve ser precedida por um destes signaes: a quantidade precedida do signal $+$, chama-se **quantidade positiva**, e a precedida do signal $-$, chama-se **quantidade negativa**. Quando o primeiro termo de uma expressão não tiver signal algum, subentende-se o signal $+$. Assim, $a-b$ quer dizer $+a-b$.

12. Duas quantidades teem signaes iguaes, quando ambos os signaes são positivos ou ambos negativos. Teem signaes contrarios, quando um é positivo e outro negativo. Assim, a quantidade $+a$ e $+b$ ou $-a$ e $-b$ teem signaes iguaes; mas $+a$ e $-b$ teem signaes contrarios.

13. O signal $\times$, escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira deve ser multiplicada pela segunda. Assim, $a\times b$, que se lê: *a multiplicado por b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a deve ser multiplicada pela quantidade representada por b; de sorte que se a lettra a fosse igual a 4, e b igual a 5, o resultado seria $a\times b=4\times 5=20$.

14. Representa-se o producto de duas ou mais lettras, escrevendo-se essas lettras unidas umas ás outras, como $a\times b=ab$; $b\times c\times d=bcd$.

Representa-se tambem o producto, escrevendo-se as lettras separadas por um ponto, como $b\times c\times d=b.c.d$; mas este modo cahiu em desuso, porque se confunde com outras expressões algebricas.

15. As quantidades que devem ser multiplicadas chamam-se **factores.** Se o factor é um numero, chama-se **factor numeral**, isto quer dizer representado por um numero. Se o factor é uma lettra, chama-se **factor litteral**, isto quer dizer representado por uma lettra. Assim, $2\times a\times b\times c$ são quatro factores que, multiplicados, dão o producto $2abc$. O factor 2 é factor numeral e a, b e c são factores litteraes.

16. Seja qual fôr a ordem em que escrevermos as lettras de um producto, o resultado será sempre o mesmo. Assim, $a\times b\times c=abc$; $b\times c\times a=bca$; $c\times a\times b=cab$. Ora, abc, bca e cab são quantidades iguaes, como vamos provar na seguinte

Illustração. Se dermos á lettra a o valor de 2; a b o valor de 3, e a c o valor de 4, teremos nas tres ordens de factores abc, bca e cab o mesmo producto, como vemos ao lado.

$$abc=2\times 3\times 4=24$$
$$bca=3\times 4\times 2=24$$
$$cab=4\times 2\times 3=24$$

Para haver uniformidade no modo de exprimir um producto, escrevem-se sempre as lettras na ordem alphabetica; assim, o producto de $c\times a\times d\times b=abcd$.

Nota. O signal $\times$ é quasi sempre omittido em Algebra; pois em lugar de se escrever $a\times b$, escreve-se logo o producto que é ab.

17. O signal $\div$, escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira quantidade deve ser dividida pela segunda. Assim, $a\div b$, que se lê: *a dividido por b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a deve ser dividida pela quantidade representada por b. Se a lettra a fosse igual a 6, e b igual a 2, o resultado seria $a\div b=6\div 2=3$.

18. Em algebra como em arithmetica, indica-se o quociente na fórma de uma fracção, escrevendo o divisor debaixo do dividendo, como $a\div b=\frac{a}{b}$. Omitte-se sempre o signal da divisão, e escreve-se logo o quociente $\frac{a}{b}$ que tambem se lê: *a dividido por b.*

19. O signal $>$, escripto entre duas quantidades, mostra que uma quantidade é maior do que a outra. A abertura do signal mostra a quantidade maior. Assim, $a > b$, que se lê: *a maior do que b*, quer dizer que a quantidade representada pela lettra a é maior do que a representada pela lettra b; assim tambem a expressão $c < d$, quer dizer que c é menor do que d. Sendo c igual a 4, e d igual a 7, o resultado será $c < d$ ou $d > c$ pois de $4 < 7$ deduz-se que $7 > 4$.

Quando não se sabe qual é a quantidade maior de uma desigualdade, escrevem-se dois signaes em sentido contrario, como $a >< b$, que se lê: *a* maior ou menor que *b*.

Exercicios sobre os symbolos algebricos

20. Damos em seguida alguns exercicios sobre os symbolos algebricos para familiarizar os discipulos com o uso das lettras, e o emprego dos signaes.

Nestes exercicios daremos ás lettras a, b, c e d os seguintes valores:

$$a=2, \quad b=3, \quad c=4, \quad d=6$$

Problema. Qual é o valor $a+4b-2c$?

Operação

$$a+4b-c$$
$$2+12-8=6$$

Solução. $a=2$; $4b=4\times3=12$; e $2c=2\times4=8$. Então o valor de $a+4b-2c$ é $2+12-8=6$.

Achar o valor das seguintes expressões:

1.	$3a+b+c$.	Resp. 13	5.	$2d+c-5a$.	Resp. ?
2.	$4a+2b+c$.	» 18	6.	$8+c-2b$.	» ?
3.	$a+3b+d$.	» 17	7.	$3a+3b+3c$.	» ?
4.	$c+20-d$.	» 18	8.	$2c-d+15$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+bc+2d$?

Operação

$$a+bc+2d$$
$$2+12+12=26$$

Solução. $a=2$; $bc=3\times4=12$, e $2d=2\times6=12$. Então o valor de $a+bc+2d$ é $2+12+12=26$.

Achar o valor das seguintes expressões:

9.	$2ab+5c-d$.	Resp. 26	13.	$ac+d-a$	Resp. ?
10.	$5bc+d-2ab$.	» 54	14.	$bd+c-d$.	» ?
11.	$ab+bc+cd$.	» 42	15.	$ab+bc-ac$.	» ?
12.	$b+2ab-c$.	» 11	16.	$2cd+5ab$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+2b+\frac{d}{b}$?

Operação

$$a+2b+\frac{d}{b}$$
$$2+6+2=10$$

Solução. $a=2$; $2b=2\times3=6$, e $\frac{d}{b}=\frac{6}{3}=2$
O valor desta expressão é $2+6+2=10$.

Achar o valor das seguintes expressões:

17.	$a+\frac{d}{a}+d$.	Resp. 11	21.	$ab+c+\frac{6}{3}$.	Resp. ?
18.	$2b+\frac{d}{b}-a$.	» 6	22.	$dc-a+\frac{d}{c}$.	» ?
19.	$\frac{c}{a}+\frac{d}{b}+6$.	» 10	23.	$\frac{d}{c}+\frac{d}{a}+\frac{c}{a}$.	» ?
20.	$ad+ab+\frac{d}{a}$.	» 21	24.	$a+\frac{ad}{c}$.	» ?

Nota. E' necessario que o discipulo comprehenda que as lettras a, b, c e d não representam respectivamente só os valores, 2, 3, 4 e 6, ellas podem representar qualquer valor segundo os dados de um problema.

Definições de alguns termos algebricos

21. Vamos agora definir alguns termos algebricos que os discipulos precisam conhecer, e guardaremos a definição dos outros para os seus respectivos logares.

22. Coefficiente é um numero prefixo a uma quantidade representada por lettras para mostrar quantas vezes essa quantidade deve ser tomada. Assim, em $4x$, o coefficiente é 4, e mostra que a lettra x deve ser tomada quatro vezes que são $x+x+x+x=4x$.

O coefficiente póde ser um numero ou uma lettra; se é um numero, chama-se **coefficiente numeral**; se é uma lettra, chama-se **coefficiente litteral**. Assim, na quantidade ay, a lettra a é o coefficiente de y, porque mostra que y tem de ser tomado a vezes. Se a fôr igual a 5, então y será tomado 5 vezes.

O coefficiente *numeral* escreve-se sempre antes das lettras que representam uma quantidade, como $8xy$, $16abcx$, etc.

23. Quando nenhum coefficiente numeral estiver prefixo a uma quantidade algebrica, subentende-se sempre o coefficiente 1; pois x é o mesmo que $1x$; bcx é o mesmo que $1bcx$.

24. Potencia de uma quantidade é o producto dessa quantidade multiplicada por si mesma, uma ou mais vezes.

Quando uma quantidade é tomada duas vezes como factor, o producto chama-se **quadrado** ou **segunda potencia** dessa

quantidade; quando é tomada tres vezes como factor, o producto chama-se **cubo** ou **terceira potencia**; quando é tomada quatro vezes como factor, chama-se **quarta potencia**, etc. Assim,

A segunda potencia de 2 é 4, porque $2\times2=4$.
A terceira potencia de 2 é 8, porque $2\times2\times2=8$.
A segunda potencia de a é aa, porque $a\times a=aa$.
A terceira potencia de a é aaa, porque $a\times a\times a=aaa$.
A quarta potencia de a é $aaaa$, porque $a\times a\times a\times a=aaaa$.

25. Expoente é o numero escripto no alto direito de uma quantidade para mostrar a que grau de potencia ella deve ser elevada, ou quantas vezes ella deve ser tomada como factor.

Em lugar de repetirmos muitas vezes a mesma lettra, para exprimir o grau de uma potencia, empregamos, por abreviatura, um expoente para esse fim. Assim,

$2\times2=2^2$.	$a\times a=aa=a^2$.
$2\times2\times2=2^3$.	$a\times a\times a=aaa=a^3$.
$2\times2\times2\times2=2^4$.	$a\times a\times a\times a=aaaa=a^4$.
$2\times2\times2\times2\times2=2^5$.	$a\times a\times a\times a\times a=aaaaa=a^5$.

Os algarismos 2, 3, 4 e 5, escriptos no alto direito do algarismo 2 e da lettra a, são os seus expoentes.

26. Os symbolos que representam as potencias lêem-se do seguinte modo:

x^4 lê-se: x elevado á quarta potencia, ou a quarta potencia de x.
x^m lê-se: x elevado á potencia m.
x^0 lê-se: x elevado á potencia zero.

Observação. E' necessario que o discipulo comprehenda perfeitamente a differença entre **coefficiente** e **expoente**. Em $3x$, 3 é coefficiente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como parcella. Em x^3, 3 é expoente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como factor em uma multiplicação.

Dando-se a x o valor de 5, podemos facilmente notar a differença numerica destas duas expressões:

$$3x=x+x+x=5+5+5=15.$$
$$x^3=x\times x\times x=5\times5\times5=125.$$

27. Raiz de uma quantidade é o factor que multiplicado por si uma ou mais vezes produz essa quantidade.

A raiz chama-se **quadrada**, quando é tomada duas vezes como factor; chama-se **cubica**, quando é tomada tres vezes como factor; chama-se **quarta raiz**, quando é tomada quatro vezes como factor, e assim por diante. De sorte que,

A raiz quadrada de 25 é 5, porque $5\times5=25$.
A raiz cubica de 125 é 5, porque $5\times5\times5=125$.
A raiz quadrada de a^2 é a, porque $a\times a=a^2$.
A raiz cubica de a^3 é a, porque $a\times a\times a=a^3$.
A quarta raiz de a^4 é a, porque $a\times a\times a\times a=a^4$.

Nestes exemplos vê-se que 5 é a raiz quadrada de 25, e a raiz cubica de 125; a é a raiz quadrada de a^2, a raiz cubica de a^3, e a quarta raiz de a^4, etc.

28. Radical é a figura $\sqrt{}$, que se escreve sobre uma quantidade para mostrar que se deve extrahir della a raiz indicada pelo indice.

29. Indice do radical é o numero que, escripto no angulo do signal radical, mostra o grau da raiz que deve ser extrahida. Assim,

$\sqrt[2]{9}$ lê-se: a raiz quadrada de 9.
$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cubica de 27.
$\sqrt[2]{a}$ lê-se: a raiz quadrada de a.
$\sqrt[3]{xy}$ lê-se: a raiz cubica de xy.
$\sqrt[4]{abc}$ lê-se: a quarta raiz de abc.

Os numeros 2, 3 e 4, escriptos nos angulos dos signaes radicaes, são os indices das raizes.

Nota. Na raiz quadrada, supprime-se o indice 2, e escreve-se simplesmente o signal radical; assim, $\sqrt{ax}$ lê-se: raiz quadrada de ax.

O signal $\sqrt{}$ é uma das fórmas antigas da lettra r, inicial da palavra raiz.

Exercicios sobre os symbolos das potencias

30. Damos em seguida alguns exercicios para os discipulos comprehenderem o valor dos symbolos algebricos que representam as diversas potencias.

Nestes exercicios daremos a x o valor de 2; a y, o valor de 3, e a z, o valor de 4.

Problema. Qual é o valor de x^2+y^3?

Operação

$$x^2=x\times x \quad =2\times 2 \quad = 4$$
$$y^3=y\times y\times y=3\times 3\times 3=27$$
$$x^2\times y^3=31$$

Solução. Se $x=2$, então $x^2=2\times 2=4$. Se $y=3$, então $y^3=3\times 3\times 3=27$. O valor das duas potencias é $4+27=31$.

Achar o valor numerico das seguintes potencias:

1.	x^3+y^2.	Resp. 17	6.	$x\ +2y+z^2$.	Resp. ?
2.	x^2+y^3-z.	» 27	7.	$3x^2+5y+z^2$.	» ?
3.	$x^3-y\ +z^2$.	» 21	8.	$y^3\ +z^2\ -5x$.	» ?
4.	$x\ +y^2+2z^2$.	» 43	9.	$2z^3+y\ +x$.	» ?
5.	$x^4-y\ -z$.	» 9	10.	$z\ \ +y^2+z^3$.	» ?

Expressões algebricas

31. Chama-se **expressão algebrica** uma quantidade representada por meio de symbolos algebricos. Assim, $5a$ é uma expressão algebrica que mostra que a quantidade a deve ser tomada 5 vezes.

$2a+3b$ é uma expressão algebrica que mostra que 3 vezes a quantidade b, deve ser addicionada a 2 vezes a quantidade a.

$3a^2-5ab$ é uma expressão algebrica que mostra que de 3 vezes o quadrado de a, deve subtrahir-se 5 vezes a quantidade ab.

32. Monomio é uma quantidade algebrica que não está unida a outra quantidade pelos signaes de sommar, subtrahir, igualdade ou desigualdade $+$, $-$, $=$ ou $>$. Assim, $3a$, $2xy$ e abx^2y são monomios.

O monomio é tambem chamado **termo** ou **quantidade simples**.

33. Polynomio é uma quantidade algebrica composta de dois ou mais termos unidos pelos signaes $+$ ou $-$. Assim, $a+b$, $ab-2x+5y^2$ são polynomios.

Se um polynomio tem dois termos, chama-se tambem **binomio;** se tem tres termos, chama-se tambem **trinomio.** Assim, $2a+b$ é um binomio; e $ab-x+y$ é um trinomio.

Nota. Monomio é a expressão algebrica que tem um só termo; binomio é a expressão algebrica que tem dois termos; trinomio é a expressão que tem tres termos, e polynomio, rigorosamente fallando, é a expressão algebrica que tem mais de tres termos. Mas, para facilitar os enunciados algebricos, dá-se geralmente o nome de polynomio a toda a expressão que tem mais de um termo.

34. Cada termo de um polynomio deve ser precedido por um dos signaes $+$ ou $-$, exceptua-se, porém, o primeiro termo que, quando é positivo, supprime-se-lhe, por abreviatura, o signal $+$, como $3ax+2bc-xy$.

35. Se um termo, precedido pelos signaes $+$ ou $-$ é combinado com outras lettras pelos signaes $\times$ ou $\div$, estas lettras fazem parte desse termo, e a elle devem ser unidas pela operação indicada. Assim, $4+3\times 6$ quer dizer que ao numero 4 devemos juntar, não 3 sómente, mas o producto de 3 multiplicado por 6, que é $3\times 6=18$; e por isso esta expressão tem só dois termos que são $4+18$. Do mesmo modo $a+b\times c$ tem só dois termos que são $a+bc$; $x+a-b\div c$ tem só tres termos que são $x+a-\frac{b}{c}$.

Os discipulos reduzirão as seguintes expressões aos seus verdadeiros termos:

1.	$50+5\times 2$.	$50+10$	7.	$4a\div 2b+c$.	?
2.	$20-3\times 2$.	$20-6$	8.	$50\div 6+ab$.	?
3.	$ac+4b\times 2$.	$ac+8b$	9.	$b-c\times d$.	?
4.	$5b-6b\div 3$.	$5b-\frac{6b}{3}$	10.	$ab-5c+d\times x$.	?
5.	$3x-8y\div a$.	$3x-\frac{8y}{a}$	11.	$x\times y\times z+ab$.	?
6.	$6b+7c\times x$.	$6b+7cx$	12.	$25-16ab\div 2$.	?

36. Mudando-se em um polynomio a ordem de seus termos, não se altera o seu valor, conservando cada termo o seu respectivo signal. Assim, a expressão $a+b-c$ é igual a $a-c+b$ ou a $b+a-c$.

Illustração. Se dermos á lettra a o valor numerico de 5; a b, o valor de 4, e a c o valor de 3, teremos nas tres expressões resultados iguaes, como vemos nas igualdades que estão ao lado.

$$a+b-c=5+4-3=6.$$
$$a-c+b=5-3+4=6.$$
$$b+a-c=4+5-3=6.$$

37. Quando uma lettra não tem expoente, subentende-se sempre o expoente 1; pois a é o mesmo que a^1; x é o mesmo que x^1, e a axy^2 é o mesmo que $a^1x^1y^2$.

38. Chama-se grau de um termo á somma dos expoentes das lettras que constituem esse termo.

$2a$ é um termo do primeiro grau, porque tem uma só lettra, que é a, com o expoente 1.

ax é um termo do segundo grau, porque tem duas lettras, que são a e x, cada uma elevada á primeira potencia.

$5axy$ é um termo do terceiro grau.

a^2b^2 é um termo do quarto grau (n. **25**).

39. Polynomio homogeneo é o que tem todos os seus termos com o mesmo grau. Assim, x^3+2xy^2+axy é um polynomio homogeneo, porque todos os seus termos são do terceiro grau.

40. Quantidades semelhantes são as que se compõem das mesmas lettras elevadas aos mesmos expoentes. Assim, $2abc^2$, $3abc^2$ e $-abc^2$ são quantidades semelhantes porque podem ser incluidas em um só termo, que é $2abc^2+3abc^2-abc^2=4abc^2$.

41. Quantidades dessemelhantes são as que teem lettras ou expoentes differentes, como $3ab^2$, $3a^2b$ e $3ax$.

42. Um polynomio que tem termos semelhantes, póde ser simplificado, isto é, póde ser reduzido o numero dos seus termos, porque dois ou mais termos semelhantes podem ser reduzidos a um só.

Assim, o polynomio $5ab+2x+4x$ póde ser reduzido a dois termos, que são $5ab+6x$, porque $2x+4x=6x$.

O polynomio $3ac+2ac+6ab-2ab$ póde tambem ser reduzido a dois termos que são $5ac+4ab$, porque $3ac+2ac=5ac$, e $6ab-2ab=4ab$. Esta reducção é um dos casos da addição algebrica, da qual adiante trataremos.

43. Reciproca ou **inversa** de uma quantidade é a unidade dividida por essa quantidade. Assim, de 3 é $\frac{1}{3}$; de ab é $\frac{1}{ab}$ o inverso de $a+x$ é $\frac{1}{a+x}$, etc.

Modo de enunciar as expressões algebricas

44. Qualquer quantidade algebrica representada por symbolos póde ser facilmente enunciada com clareza, por meio de palavras. Assim,

$ac+\frac{b}{d}$ lê-se: «o producto de ac mais o quociente de b por d» ou simplesmente: «ac mais b dividido por d».

$a^2+2ab+b^2$ lê-se: «a quadrado mais $2ab$ mais b quadrado.»

45. Quando duas ou mais quantidades teem um divisor commum, ou estão incluidas debaixo de um signal radical, ligam-se todas com a conjuncção e. Assim,

$a+\frac{b}{c}$ lê-se: «a mais b dividido por c». $\frac{a+b}{c}$ lê-se: «a somma de a mais b dividida por c, ou a e mais b dividido por c».

Se omittirmos a conjuncção *e*, enunciaremos a expressão antecedente. $\frac{2xy}{\sqrt{a-b}}$ lê-se: «$2xy$ dividido pela raiz quadrada de a e menos b». Se omittirmos a conjuncção, o divisor será $\sqrt{a}-b$.

Lêr as seguintes expressões algebricas:

1. $bx-3ay^2$.
2. $a^2bc-2abc+6x$.
3. $\frac{a+c}{c}+\frac{abc}{2d}$.
4. $4a^2b^3c^4-\frac{4a-2b}{xy}$
5. $18xy^3\div\sqrt{a^2-b^2}$
6. $\frac{18+ab}{x+y}+\frac{a^2+b}{\sqrt{x-y}}$

ADDIÇÃO

46. Addição em Algebra é a operação que tem por fim reunir duas ou mais quantidades algebricas em uma só expressão, chamada somma.

47. Na addição algebrica ha tres casos a considerar que são:

1.º Quando as quantidades são semelhantes e teem signaes iguaes.

2.º Quando as quantidades são semelhantes, mas teem signaes differentes.

3.º Quando todas as quantidades não são semelhantes.

Nota. Para evitar difficuldades, o discipulo recordará os dois pontos seguintes:

1.º As quantidades que não tiverem signal prefixo, são consideradas positivas, isto é, com o signal +. (n.º **11**).

2.º As quantidades que não tiverem coefficiente, subentende-se o coefficiente 1; assim, ab quer dizer $1ab$. (n.º **23**).

Primeiro caso de addição

48. Quando as quantidades são semelhantes, e teem signaes iguaes, addicionam-se os coefficientes, e á somma junta-se a parte litteral com o signal das parcellas. Neste caso procede-se justamente como em Arithmetica.

Problema. Qual é a somma das quantidades 3 annos, 5 annos, 4 annos e 1 anno?

Solução. Sommando as quatro quantidades $3+5+4+1$, temos 13, isto é, 13 annos.

Substituindo agora a palavra annos pela lettra a, é evidente que a somma será $13a$. Se as quatro quantidades, em lugar do signal $+$ subentendido, tivessem o signal $-$, a somma seria $-13a$, porque a somma deve exprimir o resultado de todas as suas parcellas.

3 annos,	$3a$
5 annos,	$5a$
4 annos,	$4a$
1 anno,	a
13 annos,	$13a$

Operar as seguintes addições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
$+5$	-4	$2a$	$2b$	$4ab$	$2x-5$
$+3$	-3	$3a$	$6b$	$8ab$	$5x-3$
$+4$	-5	$5a$	$4b$	ab	$x-8$
$+2$	-4	$8a$	$5b$	$6ab$	$4x-2$
$+14$	-16	$18a$	$17b$	$19ab$	$12x-18$

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
$3ac$	$-2bx$	$5abx^2$	$7a+8$	$8x-5$	$2a-b$
$15ac$	$-3bx$	$3abx^2$	$5a+3$	$6x-3$	$5a-2b$
$9ac$	$-bx$	$2abx^2$	$a+4$	$2x-6$	$a-5b$
$6ac$	$-4bx$	abx^2	$2a+1$	$3x-4$	$3a-2b$
$2ac$	$-6bx$	$4abx^2$	$4a+6$	$x-2$	$5a-4b$

49. Uma somma algebrica não é em todos os casos igual a uma somma em Arithmetica, como no caso precedente.

Em Arithmetica, como as quantidades que se addicionam são sempre positivas, a somma deve ser sempre maior do que qualquer das suas parcellas; assim, na operação $3+4+8=15$, a somma 15 é maior do que qualquer das parcellas 3, 4 ou 8. Em Algebra, porém, como temos de addicionar tambem quantidades negativas, a somma poderá ser algumas vezes nulla ou numericamente inferior á somma das quantidades positivas, como vamos ver no caso seguinte:

Segundo caso da addição

50. Quando as quantidades são semelhantes, mas teem signaes differentes, isto é, quando umas teem o signal $+$, e outras teem o signal $-$, addicionam-se os coefficientes dos termos positivos; depois addicionam-se os coefficientes dos termos negativos; acha-se a differença das duas sommas, e, se a somma maior fôr positiva, dá-se á differença o signal $+$, e, se a somma maior fôr negativa dá-se á differença o signal $-$, e junta-se-lhe a parte litteral.

Problema. Achar a somma das seguintes quantidades: $+3a+5a$, $-4a$, $+6a$ e $-2a$.

Solução. A somma das quantidades positivas é $14a$; a somma das quantidades negativas é $6a$; a differença das duas sommas é $14a-6a=8a$. Ora, como a somma maior é a positiva, dá-se á differença o signal $+$ e ficará $+8a$ que é a somma das cinco parcellas.

$$\begin{array}{r} +3a \\ +5a \\ -4a \\ +6a \\ -2a \\ \hline +8a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3a-4a \\ +5a-2a \\ +6a \\ \hline +14a-6a=8a \end{array}$$

Demonstração. Para comprehendermos este caso, figuremos um cofre onde guardamos dinheiro. As quantias que recolhemos no cofre são positivas, as que tiramos são negativas, e a somma de todas mostra o que existe no cofre. Ora, como cada quantia negativa annulla uma quantia positiva semelhante ou de igual valor, segue-se que, se a somma das quantias negativas fosse igual á das positivas, o resultado da addição seria nullo ou zero; mas, como no caso presente a somma das quantidades negativas é só $6a$, annulla $6a$ em $14a$, e o resultado da addição é $8a$. Portanto, a somma destas cinco quantidades é $+8a$.

51. Este caso da addição é uma simples reducção de termos semelhantes; (n. **42**), pois, se escrevermos todos os termos desta addição em fórma de um polynomio, e effectuarmos a reducção, o resultado será o mesmo, como $3a+5a-4a+6a-2a=8a$. Portanto, não é rigorosamente necessario escrever os termos algebricos em columna para se effectuar a addição; podemos tambem chegar ao mesmo resultado, reduzindo os termos quando elles estão em fórma de um polynomio. A columna tem a vantagem de tornar mais intelligivel e claro o ensino desta operação.

52. Para completarmos este caso, vamos operar uma addição, na qual a somma será menor do que zero, isto é, será uma quantidade negativa.

Problema. Sommar as seguintes quantidades: $+5a$, $+3a$, $-10a$, $+2a$ e $-6a$.

Solução. A somma das quantidades positivas é $10a$; a somma das quantidades negativas é $16a$, e a differença entre as duas sommas é $6a$. Ora, como a somma maior é negativa, a differença é tambem negativa, e por isso a somma é $-6a$.

$$\begin{array}{r} +5a \\ +3a \\ -10a \\ +2a \\ -6a \\ \hline -6a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -10a \\ -6a \\ \hline -16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +5a \\ +3a \\ +2a \\ \hline +10a=-6a \end{array}$$

Demonstração. Para comprehendermos este processo, figuremos ainda um cofre onde guardamos o nosso dinheiro, e depositamos tambem o dinheiro de uma pessôa, que deposita e retira diversas quantias. As

quantias que ella deposita são positivas, e as que retira, são negativas. Ella entrou com $5a+3a+2a=10a$, e retirou $10a+6a=16a$; se ella tivesse retirado sómente $10a$, o resultado seria nullo ou zero, porque em nada alteraria os fundos que tinhamos no cofre; mas como ella tirou $16a$, isto é, $6a$ mais do que poz, o resultado será $-6a$, isto é, ficará um desfalque de $6a$. Portanto, a somma de $+5a+3a-10a+2a-6a=-6a$.

Operar as seguintes addições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
-2	$+8$	$+3a$	$+5abx$	$ab+8$
$+7$	-4	$+10a$	$-3abx$	$3ab+1$
-3	$+9$	$-12a$	$-abx$	$-2ab+5$
$+4$	-7	$-6a$	$-5abx$	$9ab-15$
-1	-6	$+2a$	$+2abx$	$-3ab-7$
$+5$	0	$-3a$	$-2abx$	$8ab-8$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$6ab$	$-bxy$	$3ab-6$	$a+b$	$a+b-2c$
$-2ab$	$-7bxy$	$-2ab+7$	$-a+b$	$-a+2b-3c$
$-ab$	$8bxy$	$-6ab-2$	$3a-2b$	$-3a-b+5c$
$5ab$	bxy	$5ab-1$	$-a+3b$	$-a+3b-c$

11. Qual é a somma de $8a$ e $-5a$? Resp. $3a$.
12. Qual é a somma de $5a$ e $-8a$? » $-3a$
13. Qual é a somma de $-7ax$, $3ax$, $6ax$, e $-ax$ » ax.
14. Qual é a somma de $4xy$, $2xy$, e $-6xy$? » 0.
15. Addicionar $4ac$, $3ac$, $7ac$, $-6ac$, $-2ac$, $9ac$, e $-17ac$. Resp. $-2ac$.
16. Addicionar $7a-5b$, $2a+3b$, $-7a-8b$ e $-a+9b$. Resp. $a-b$.
17. Achar a somma de $8ax-2by$, $-2ax+3by$, $3ax-4by$ e $-9ax+8by$. Resp. $5by$.
18. Achar a somma de $3ab-10x$, $-3ab+7x$, $3ab-6x$, $-ab+2x$ e $-2ab+7x$ Resp. 0.

Terceiro caso de addição

53. Quando alguns dos termos não são semelhantes, escrevem-se em columna os termos semelhantes, e os dessemelhantes escrevem-se adiante, e depois procede-se como nos dois casos precedentes.

Problema. Quanto sommam 2 centos, mais 3 centos e mais 4 duzias?

Solução. Como 2 centos e 3 centos são quantidades semelhantes, escrevem-se em columna para facilitar a somma; como 4 duzias é uma quantidade dessemelhante, escreve-se adiante; a somma das tres quantidades é 5 centos e 4 duzias.

Se em lugar de escrevermos as palavras centos e duzias, escrevermos c e d, o resultado será o mesmo, pois $2c+3c+4d=5c+4d$.

2 centos
3 centos + 4 duzias
5 centos + 4 duzias

$$\begin{array}{l} 2c \\ 3c+4d \\ \hline 5c+4d \end{array}$$

Regra geral para a addição. *Escrevem-se os termos semelhantes em columnas, e adiante delles, os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes; addicionam-se os termos semelhantes que forem positivos, depois os que forem negativos, e a differença das duas sommas escreve-se debaixo da columna respectiva com o signal da somma maior e com a parte litteral, e accrescentam-se os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes.*

Operar as seguintes addições:

(1.)
$$\begin{array}{l} 4a+5b-7c \\ 3a-b+2c \\ 9a-2b-c \\ -a+3b+4c \\ \hline 15a+5b-2c \end{array}$$

(2.)
$$\begin{array}{l} 3b+4x-y^2 \\ 5b+7x+3y^2 \\ b-6x+4y^2 \\ -4b+9x-8y^2 \\ \hline \end{array}$$

(3.)
$$\begin{array}{l} 5a+xy+m \\ 9a-5xy+7m \\ -6a+8xy-8m \\ 7a-9xy+9m \\ \hline \end{array}$$

(4.)
$$\begin{array}{l} 7x-9y+5z+3-g \\ -x-3y-8-g \\ -x+y-3z+1+7g \\ -2x+6y+3z-1-g \\ \hline \end{array}$$

(5.)
$$\begin{array}{l} 8a+b \\ 2a-b+c \\ -3a+b+2d \\ -6b-3c+3d \\ \hline \end{array}$$

6. $6a+4c+3b-2a-3c-5b$. Resp. $4a-2b+c$.
7. $2ab+c$, $4ax-2c$, $12-2ax$, $6ab+3c-x$. Resp. $8ab+2ax+2c+12-x$.
8. $14a+x$, $13b-y$, $-11a+2y$, $-2a-12b+z$. Resp. $a+b+x+y+z$.
9. $-7b+3c$, $4b-2c+3x$, $3b-3c$, $2c-2x$. Resp. x.
10. $a-3b+4c-5d$, $3b-5c+6d-2a$, $5c-7d+4a-3b$, $7d-5a+6b-3c$. Resp. $-2a+3b+c+d$.
11. x^3-5x^2+6x-2, $3x^3-6x^2-15x+4$, x^3-8x^2-6x+4. Resp. $5x^3-19x^2-15x+6$.

12. $8ax-3cz^2$, $-5ax+5cz^2$, $ax+2cz^2$, $-4ax-4cz^2$. Resp. 0.
13. Qual é a somma de $3(a+b)$, $7(a+b)$ e $5(a+b)$?

Solução. As quantidades que estão enfeixadas em um parenthesis, são consideradas como um só factor. E' evidente que 3 vezes, mais 7 vezes, mais 5 vezes uma quantidade são iguaes a 15 vezes essa quantidade.

$$\begin{array}{r} 3(a+b) \\ 7(a+b) \\ 5(a+b) \\ \hline 15(a+b) \end{array}$$

14. Sommar $13(a+b)+15(a+b)-7(a+b)$. Resp. $21(a+b)$.
15. Achar a somma de $8c(x-y)$, $7c(x-y)$, $-5c(x-y)$, e $9c(x-y)$. Resp. $19c(x-y)$.
16. Achar a somma de $3a(b+x)$, $5a(b+x)$, $7a(b+x)$ e $-14a(b+x)$. Resp. $a(b+x)$.

SUBTRACÇÃO

54. Subtracção em Algebra é a operação que tem por fim achar a differença entre duas quantidades algebricas.

A quantidade da qual se tem de fazer a subtracção, chama-se **minuendo**; a quantidade que se tem de subtrahir, chama-se **subtrahendo**, e o resultado da operação, chama-se **differença algebrica.**

Em Algebra, bem como em Arithmetica, a somma do subtrahendo e da differença é igual ao minuendo.

Nota. A subtracção é uma operação muito simples em Arithmetica, mas um tanto difficil em Algebra, e por isso é necessario alguma attenção dos discipulos para elles poderem comprehender o modo analytico de resolver os seus diversos casos.

Em Arithmetica, como se opera só com quantidades positivas, a idéia da subtracção é sempre diminuição; em Algebra, porém, a differença entre duas quantidades póde ser numericamente maior do que ellas; assim, sendo $+a$ o minuendo, e $-a$ o subtrahendo, a diferença entre $+a$ e $-a$ é $2a$.

Ha um modo muito simples de operar todos os casos da subtracção sem difficuldade alguma. Esse modo *é trocar o signal de todos os termos do subtrahendo, e depois sommar o minuendo e o subtrahendo;* e assim qualquer caso da subtracção ficará reduzido a uma simples addição algebrica.

Não é, porém, conveniente empregarmos esta regra sem primeiro comprehendermos a analyse de cada caso da subtracção, do contrario não poderemos ter uma idéa exacta desta operação algebrica.

Primeiro caso da subtracção

55. Quando os dois termos de uma subtracção são semelhantes e teem signaes iguaes, acha-se a differença entre os coefficientes e escreve-se em baixo com a parte litteral e o signal commum.

Problema. Qual é a differença entre $7ab$ e $4ab$?

Solução. Se de 7 laranjas tirarmos 4 laranjas restarão 3 laranjas; então é evidente que de $7ab$ subtrahindo $4ab$, restam $3ab$. A differença, pois, entre $7ab$ e $4ab$ é $3ab$. Este caso é igual á subtracção em Arithmetica.

Minuendo	$7ab$
Subtrahendo	$4ab$
Differença	$3ab$

Operar as seguintes subtracções:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
10	-9	$5ac$	$-8abc^2$	$3a+8$
8	-2	ac	$-8abc^2$	$2a+7$
2	-7	$4ac$	0	$a+1$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$18ab$	$30axy$	$-95y$	$3bx$	$18d-11$
$17ab$	$12axy$	$-81y$	$3bx$	$9d-9$

Segundo caso da subtracção

56. Em Algebra podemos tambem subtrahir uma quantidade numericamente maior, de outra menor, e se os signaes forem iguaes, o resultado será a differença das duas quantidades com o signal contrario.

Problema. Subtrahindo $8a$ de $6a$ quanto resta?

Solução. Subtrahindo $6a$ de $6a$, restam 0 ou nada; subtrahindo-se $7a$ de $6a$, resta $-a$, e subtrahindo $8a$ de $6a$, restam $-2a$.

	Subtracção	Addição
Minuendo	$+6a$	$+6a$
Subtrahendo	$+8a$	$-8a$
Resto	$-2a$	$-2a$

Demonstração. Para comprehendermos a analyse desta solução, figuremos que um homem, levando só 6$000, foi a uma loja, e alli comprou 8$ de objectos; ora, se elle tivesse despendido só 6$000, voltaria da loja sem dinheiro algum; mas como gastou 8$000, voltou com 2$000 de menos, isto é, voltou com uma divida de 2$000, que ainda tem de pagar. Logo, 6$—8$=—2$. Trocando o cifrão pela lettra a, temos $6a-8a=-2a$.

Se mudarmos o signal do subtrahendo, e operarmos a addição algebrica, o resultado será o mesmo, como vemos na operação acima.

Operar as seguintes subtracções:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
12	$-15a$	$25ax$	$-29ay$	$18x+23$
13	$-18a$	$36ax$	$-30ay$	$20x+25$
-1	$+3a$	$-11ax$	$+ay$	$-2x-2$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
33	$-26a$	$42bx$	$-17ay$	$24x+13$
44	$-36a$	$49bx$	$-18ay$	$22x+15$

Terceiro caso da subtracção

57. Quando os dois termos de uma subtracção são quantidades dessemelhantes, exprime-se a sua differença escrevendo as duas quantidades separadas pelo signal —.

Problema. Da quantidade a subtrahir a quantidade b.

Solução. Desde que não sabemos o numero das unidades representadas pela quantidade a, nem pela quantidade b, é claro que só podemos indicar a sua differença pela expressão $a-b$.

Os dois termos desta subtracção são ambos positivos; se porém trocarmos o signal do subtrahendo pondo —, e depois operarmos a addição algebrica, o resultado será tambem $a-b$.

Subtracção	Addição
a	$+a$
b	$-b$
$a-b$	$a-b$

Operar as seguintes subtracções:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Minuendo	x	a	$2ab$	$a+b$	$2a-5$
Subtrahendo	y	8	$3xy$	c	y
Differença	$x-y$	$a-8$	$2ab-3xy$	$a+b-c$	$2a-5-y$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
$18y$	$4b+x$	$ab-9$	$a+b+c$	$25+x^2$	$3x^2+20$
$17x$	$3y$	xy	d	$18a$	$5a$

Quarto caso da subtracção

58. Quando de uma quantidade positiva se subtrahe uma quantidade negativa semelhante, o resultado será igual á somma das duas quantidades.

Tomando, por exemplo, o numero 10, e subtrahindo delle os numeros 2, 1, 0, —1, —2, etc., teremos

Minuendo	10	10	10	10	10
Subtrahendo	2	1	0	−1	−2
Resto	8	9	10	11	12

Subtrahindo 2 de 10 resta 8, subtrahindo 1 resta 9; subtrahindo 0 resta 10; subtrahindo — 1 resta 11; subtrahindo —2 resta 12, porque o subtrahendo negativo augmenta o valor do minuendo.

59. Para comprehendermos melhor este rezultado vamos resolver o seguinte problema:

Problema. Em certo dia o themometro marcou 3 graus de calor, e no dia seguinte marcou 2 graus abaixo de zero; qual foi a differença de temperatura nestes dois dias?

Solução. Os graus acima de zero são positivos, e os graus abaixo do zero são negativos. Ora, é evidente que para achar a differença de calor entre + 3 graus e — 2 graus é necessario sommar os numeros 3 e 2, que fazem 5. Logo a differença entre + 3g. e — 2g. é igual a + 5g.

$+3$ g.
-2 g.
$+5$ g.

60. Para este caso ficar perfeitamente claro, vamos resolver mais o seguinte problema:

Problema. Da quantidade a subtrahindo a quantidade $b-c$, quanto resta?

Solução. Si subtrahirmos b de a, o resultado será $a-b$, como vimos no 3º caso. O subtrahendo, porém, não é b e sim $b-c$, que é uma quantidade c unidades menor do que b.

Quer isto dizer que, subtrahindo b, nós subtrahimos c unidades a mais do que deviamos; logo, para obter o verdadeiro resultado, devemos juntar c á differença $a-b$. O verdadeiro resultado é, então, $a-b+c$ ou $a+c-b$.

Ora, si trocassemos os signaes do subtrahendo e operassemos a somma algebrica, o resultado seria o mesmo.

Subtracção	Addição
a	a
$b-c$	$-b+c$
$a-b+c$	$a-b+c$

Demonstração. Por meio de numeros podemos comprehender facilmente este resultado. Seja subtrahir 5—3 de 9. Si subtrahirmos 5 de 9, o resultado será 9—5=4. O subtrahendo, porém, não é 5 e sim 5—3, que é uma quantidade menor 3 unidades do que 5. Logo, para obter o verdadeiro resultado, devemos juntar 3 á differença 9—5. Virá, então, 9—5+3 ou 9+3—5=7.

a	9
$b-c$	$5-3$
$a-b+c$	$=9-5+3$

Todos os casos da subtracção algebrica são resolvidos facilmente pela seguinte regra geral:

Regra geral da subtracção. *Escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo, de sorte que os termos semelhantes fiquem uns debaixo dos outros.*

Consideram-se todos os termos do subtrahendo com o signal mudado: o que tiver o signal +, ficará com o signal —, e o que tiver o signal —, ficará com o signal +.

Addicionam-se depois o minuendo e o subtrahendo segundo a regra da addição algebrica, e o resultado será o resto da subtracção.

Nota. A regra ficará perfeitamente comprehendida, operando o seguinte exemplo por subtracção e depois por addição, trocando os signaes do subtrahendo, conforme está preceituado na regra:

	Subtracção	Addição
Minuendo	$5a+3b-c$	$5a+3b-c$
Subtrahendo	$2a-2b-3c$	$-2a+2b+3c$
Differença	$3a+5b+2c$	$3a+5b+2c$

Operar as seguintes subtracções:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$8-5$	$3ax-2y$	$4cx^2-3by^2$	$8xyz+3az-8$
$-2+3$	$2ax+3y$	$2cx^2+3by^2$	$5xyz-3az+8$
$10-8$	$ax-5y$	$2cx^2$	$3xyz+6az-16$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
$7x+4y$	$3a-2b$	$6ax-4y^2+3$	$5a+2x-2y$
$6x+y$	$3a-3b$	$3ax-6y^2+2$	$2a+x-4y-z$

9. De 14 subtrahir $ab-5$.	Resp.	$19-ab$.
10. De $a+b$ subtrahir a.	»	b.
11. De a subtrahir $a+b$.	»	$-b$.
12. De x subtrahir $x-5$.	»	5.
13. De $3ax$ subtrahir $2ax+7$.	»	$ax-7$.
14. De $x+y$ subtrahir $x-y$.	»	$2y$.
15. De $x-y$ subtrahir $y+x$.	»	$-2y$.
16. De $x-y$ subtrahir $y-x$.	»	$2x-2y$.
17. De $x+y+z$ subtrahir $x-y-z$.	»	$2y-2z$.
18. De $5x+3y-z$ subtrahir $4x+3y+z$.	»	$x-2z$.
19. De a subtrahir $-a$.	»	$2a$.
20. De $8a$ subtrahir $-3a$.	»	$11a$.
21. De $5b$ subtrahir $+11b$.	»	$-6b$.
22. De $3a$ subtrahir $-2b$.	»	$3a+2b$.
23. De $-9a$ subtrahir $3a$.	»	$-12a$.
24. De $-7a$ subtrahir $-7a$.	»	0.
25. De $-19a$ subtrahir $-2a$.	»	$-17a$.
26. De -9 subtrahir -16.	»	7.
27. De 12 subtrahir -8.	»	20.
28. De -14 subtrahir -5.	»	-9.
29. De $3a-2b+6$ subtrahir $2a-7b-3$.	»	$a+5b+9$.

30. De $32a+3b$ subtrahir $5a+17b$.	Resp.	$27a-14b$.
31. De $5(x+y)$ subtrahir $2(x+y)$.	»	$3(x+y)$.
32. De $3a(x-z)$ subtrahir $a(x-z)$.	»	$2a(x-z)$.
33. De $13a-2b+9c-3d$ subtrahir $8a-6b+9c-10d$.	»	$5a+4b+7d$.

Applicação do parenthesis na addição e na subtracção

61. Pelo que acabamos de expôr nas operações da addição e subtracção, fica evidente que os signaes + e — teem duas significações muito distinctas, que são:

1.º *Indicar simplesmente as operações de addição e subtracção.*

2.º *Mostrar a natureza positiva ou negativa das quantidades.*

62. Se subtrahirmos a quantidade b da quantidade a, o resultado será $a-b$; neste exemplo, o signal — simplesmente indica a operação de subtrahir; pois, está subentendido que os dois termos da subtracção são de natureza positiva, porque a expressão completa seria $+a-+b$.

Se, porém, da quantidade positiva a subtrahissemos a quantidade negativa $-b$, a expressão completa seria $+a--b$. Nesta expressão fica claro que o primeiro signal — indica simplesmente uma subtracção, e o segundo signal — mostra a natureza negativa da quantidade $-b$. Ora, como a repetição de dois signaes iguaes póde trazer confusão, emprega-se o parenthesis ( ) para se escrever com clareza as expressões algebricas, e assim temos $a-(-b)$.

63. Quando duas ou mais quantidades são consideradas como um só termo, fecham-se com um parenthesis, para serem tomadas neste sentido. Assim, a expressão $10-(6+2)$ mostra que de 10 temos de subtrahir $6+2$, isto é, 8. Se tirassemos o parenthesis, a expressão seria $10-6+2$, isto é, mostrava que de 10 deveriamos tirar 6, e ao resto juntar 2, o que daria um resultado differente do primeiro; precisamos, pois, saber tirar o parenthesis de uma expressão algebrica sem lhe alterar o valor.

64. Os dois principios seguintes nos esclarecerão perfeitamente neste ponto.

1.º *Quando uma expressão algebrica fechada por um parenthesis é precedida pelo signal +, póde-se tirar o parenthesis sem se alterar o valor da expressão.*

Demonstração. Segundo este principio, a expressão $a+(b-c)$ deve ser igual a $a+b-c$. Ora é evidente que tirando o parenthesis em nada se altera a expressão, porque em ambos os casos junta-se $b-c$ á quantidade a.
Dando á lettra a o valor de 5, a b o valor de 4, e a c o valor de 3, teremos:

$$a+(b-c)=5+(4-3)=6.$$
$$a+b-c=5+4-3=6.$$

2.º *Quando uma expressão algebrica fechada por um parenthesis é precedida pelo signal —, para se tirar o parenthesis sem se alterar o valor da expressão, é necessario trocar os signaes de todos os termos fechados no parenthesis: o que fôr positivo, ficará negativo; e o que fôr negativo, ficará positivo.*

Demonstração. Segundo este principio a expressão $a-(b-c)$ deve ser igual a $a-b+c$. O termo b, que no parenthesis tinha o signal + subentendido, fica com o signal — para indicar a subtracção; o termo c, que tinha o signal —, fica com o signal +, pela razão exposta no n.º **60.**
Dando a estas lettras os mesmos valores que demos acima, teremos:

$$a-(b-c)=5-(4-3)=4.$$
$$a-b+c=5-4+3=4.$$

65. Quando duas ou mais quantidades que já teem um parenthesis, são consideradas como um só termo, ligam-se com um vinculo como $a-\overline{b+(c-d)}$.
Esta expressão sem o vinculo ficará transformada em $a-b-(c-d)$, e sem o parenthesis ficará $a-b-c+d$.
Com o auxilio do parenthesis e do vinculo podemos exprimir um polynomio por diversas fórmas sem alterarmos o seu valor.

Tirar o parenthesis dos seguintes polynomios sem lhes alterar o valor:

1.	$a-(+b)$.	Resp.	$a-b$
2.	$a-(-b)$.	»	$a+b$.
3.	$ab+(a-c)$.	»	$ab+a-c$.
4.	$ax-(a-y)$.	»	$ax-a+y$.
5.	$a-b-(a+b)$.	»	$-2b$.
6.	$2a+(8-7+6)-x$.	»	?.
7.	$5x-3b-(-3a+c)$.	»	?.
8.	$2a-b-(-2a+b)$.	»	?.
9.	$ab-(bc-d)$.	»	?.
10.	$5x-(-y+ab-4d)$.	»	?.

MULTIPLICAÇÃO

66. A quantidade que se multiplica, chama-se **multiplicando**; a quantidade pela qual ella é multiplicada, chama-se **multiplicador**; e o resultado da operação chama-se **producto.**
O multiplicando e o multiplicador chamam-se tambem **factores** do producto.

67. Como foi já demonstrado no n.º **16,** *o producto de duas ou mais quantidades é sempre o mesmo, seja qual fôr a ordem em que tomarmos esses factores.*
Isto quer dizer que se tomarmos o multiplicando pelo multiplicador ou o multiplicador pelo multiplicando, o producto será sempre o mesmo. Assim $5\times4=4\times5$; do mesmo modo $a\times b=b\times a$; em ambos os casos o producto é ab.
Segue-se deste principio que o producto de $a\times c\times3$, de $a\times3\times c$ ou de $3\times c\times a$ é o mesmo; e como se escreve primeiro o coefficiente numeral e depois as lettras na ordem alphabetica, o producto nos tres casos é $3ac$.

68. Na multiplicação algebrica ha tres casos a considerar, que são:

1.º *Quando os dois factores são monomios.*
2.º *Quando um factor é polynomio e o outro monomio.*
3.º *Quando ambos os factores são polynomios.*

Primeiro caso da multiplicação

69. Em cada caso da multiplicação algebrica é necessario que o discipulo saiba operar com quatro dados que são:

1.º *O coefficiente.*	3.º *O expoente.*
2.º *A parte litteral.*	4.º *O signal.*

70. O coefficiente e a parte litteral. Para determinar a regra para achar o coefficiente e a parte litteral do producto, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o producto de $2a$ multiplicado por $3b$?

Solução. O producto de 2×3 é 6; o producto de $a\times b=ab$, (n.º **14**). Então o producto de $2a\times3b=6ab$.

Operação

Multiplicando	$2a$
Multiplicador	$3b$
Producto	$6ab$

Regra. *Para se obter o coefficiente e a parte litteral de um producto, multiplicam-se entre si os coefficientes, e ao producto juntam-se todas as lettras dos dois factores na ordem alphabetica.*

Exemplos para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$3x$	$4ab$	$15ac$	$19abc$
Multiplicador	$2y$	$3cd$	x	$5dx$
Producto	$6xy$	$12abcd$	$15acx$	$95abcdx$

(5.)	(6.)	(7)	(8.)	(9.)
$9acx$	$20xy$	$18az$	$28xz$	$15xy$
$7b$	$10z$	$15by$	y	$8ab$

71. O expoente. Para determinarmos a regra do expoente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o producto de $3a^2$ multiplicado por $4a^3$?

Solução. Multiplicando os coefficientes, temos $3 \times 4 = 12$; multiplicando agora as duas potencias de a, temos $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. O producto é pois $12a^5$.

Demonstração. Desde que $3a^2 = 3aa$, e $4a^3 = 4aaa$, segue-se que o producto de $3aa \times 4aaa$, é $12aaaaa$; ora, como $aaaaa$ se exprime a^5 (n.º **25**), segue-se que o producto é $12a^5$. Portanto,

Operação

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ 4a^3 \\ \hline 12a^5 \end{array}$$

Regra. *O expoente de uma lettra no producto é igual á somma dos expoentes da mesma lettra nos dois factores.*

Exemplos para resolver:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
$3b$	$4ab$	$7ab^3$	$18ab$	$26x^3$
$5b$	a	$5ab$	$5b^2c$	$5a^4x^2$
$15b^2$	$4a^2b$	$35a^2b^4$	$90ab^3c$	$130a^4x^5$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$12b^2$	$13ab^2$	$18a^2b^2$	$20x^5y$	$7abcd$
b	$6a^2b$	$5ab^5$	$8x^4y$	$9ab^2c^3d$

Nota. Quando ambos os factores da multiplicação são potencias da mesma lettra, póde-se operar simplesmente com os expoentes. Assim, $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; $x^2 \times x = x^{2+1} = x^3$; $x^3 \times x^2 \times x^4 = x^{3+2+4} = x^9$.

72. Os signaes. Investigando as leis que regem os signaes do producto, temos o resultado seguinte:

Se os signaes dos dois factores forem iguaes, o signal do producto será positivo; mas se forem desiguaes, o signal do producto será negativo. Isto quer dizer que

+ multiplicado por + dá +,
— multiplicado por — dá +,
+ multiplicado por — dá —,
— multiplicado por + dá —,

Demonstração. Para podermos comprehender a razão deste resultado, devemos analysar cada um destes casos separadamente.

PRIMEIRO CASO. Qual é o producto de $+a$ multiplicado por $+4$?

Analyse. A quantidade $+a$ tomada uma vez é $+a$; tomada duas vezes é $+2a$; tomada tres vezes é $+3a$, e tomada quatro vezes é $+4a$.
Ora, como o multiplicador é positivo, mostra que o producto $+4a$ deve entrar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade additiva, e por isso deve levar o signal +. Então o producto de $+a \times (+4) = +4a$. Logo, *o producto de duas quantidades positivas é positivo.*

SEGUNDO CASO. Qual é o producto de $-a$ multiplicado por -4?

Analyse. A quantidade $-a$ tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, o signal do multiplicador sendo —, mostra que o producto $-4a$ tem de entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um substractivo; mas a subtracção de uma quantidade negativa tem effeito positivo, isto é, essa quantidade entra no calculo com um additivo (n.º **58**), e por isso deve levar o signal +; então, $-a \times (-4) = +4a$. Logo, *o producto de duas quantidades negativas é positivo.*

TERCEIRO CASO. Qual é o producto de $+a$ multiplicado por -4?

Analyse. Já vimos no primeiro caso que a quantidade $+a$ tomada quatro vezes é $+4a$. Ora, como o signal do multiplicador é —, mostra que o producto $+4a$ deve entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um subtractivo, e por isso deve levar o signal —; então $+a \times (-4) = -4a$. Logo, *uma quantidade positiva multiplicada por uma negativa, dá um producto negativo.*

QUARTO CASO. Qual é o producto de $-a$ multiplicado por $+4$?

Analyse. A quantidade $-a$ tomada uma vez é $-a$; tomada duas vezes é $-2a$; tomada tres vezes é $-3a$, e tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, como o signal do multiplicador é +, mostra que o producto $-4a$ deve entrar no calculo de que faz parte esta multiplicação, como um additivo; mas a addição de uma quantidade negativa é o mesmo que uma subtracção, e por isso o producto deve levar o signal —. Então o producto de $-a \times (+4) = -4a$. Logo, *uma quantidade negativa multiplicada por uma positiva, dá um producto negativo.*

73. Nestas quatro analyses estabelecemos a seguinte regra dos signaes:

Regra. *O producto de signaes iguaes leva o signal* $+$, *e o producto de signaes desiguaes leva o signal* $-$.

Exercicios para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$+5a$	$-3x$	$+5ab$	$-12y$
Multiplicador	$+2a$	$+x$	$-3bc$	$-5x$
Producto	$+10ab$	$-3x^2$	$-15ab^2c$	$+60xy$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$+12x^2$	$-8ab$	$+16bx$	$-25x$	$+15abc$
$+5a$	$+9ac$	$-6a$	$-8y^2$	$-12ac$

Segundo caso da multiplicação

74. Quando o multiplicando é um polynomio, multiplica-se cada um dos seus termos pelo multiplicador, observando as regras dos coefficientes, expoentes, parte litteral e signaes.

Problema. Qual é o producto de $a-b$ multiplicado por b?

Solução. Multiplicando cada termo do multiplicando pelo multiplicador, temos $a \times b = ab$. Como ambos os factores teem o signal $+$ subentendido, o producto é positivo. O segundo termo é $b \times b = b^2$. Como neste caso um dos factores tem o signal $-$, e o outro, o signal $+$ subentendido, o producto será negativo, e o resultado da operação será $ab-b^2$.

Operação

$$\begin{array}{r} a-b \\ b \\ \hline ab-b^2 \end{array}$$

Demonstração. Podemos dar uma demonstração numerica da exactidão do producto, dando á quantidade a o valor de 5, e a b, o valor de 2. Multiplicando $5-2$ por 2, temos o producto de $10-4=6$. Ora, o termo ab é igual a $5 \times 2=10$, e o termo b^2 igual a $2 \times 2=4$; logo, o producto $ab-b^2$ é igual a $10-4=6$.

$$\begin{array}{r} a-b = 5-2 \\ b = \quad 2 \\ \hline ab-b^2=10-4=6 \end{array}$$

Exercicios para resolver:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$ab+cd$	$bc-ad$	$2a-b$	$a+b-5.$
ac	ab	$-x$	$2a.$
a^2bc+ac^2d	ab^2c-a^2bd	$-2ax+bx$	$2a^2+2ab-10a$

5. Multiplicar $a+d$ por b. Resp. $ab+bd$.
6. Multiplicar $ac+bc$ por d. » $acd+bcd$.
7. Multiplicar $4x+5y$ por $3a$. » $12ax+15ay$.
8. Multiplicar $2x+3y$ por $2b$. » $4bx+6by$.
9. Multiplicar $m+2n$ por $-3n$. » $-3mn-6n^2$.
10. Multiplicar $x+y$ por ax. » ax^2+axy.
11. Multiplicar $2a+2b-3c$ por a. » $2a^2+2ab-3ac$.
12. Multiplicar $ab+ax+xy+6$ por $2ax$.
    Resp. $2a^2bx+2a^2x^2+2ax^2y+12ax$.

Terceiro caso da multiplicação

75. Quando ambos os factores são polynomios, opera-se do seguinte modo:

Problema. Qual é o producto de $a+b$ multiplicado por $a+b$?

Solução. Multiplicando $a+b$ por a, temos o producto parcial a^2+ab; multiplicando depois $a+b$ por b, temos o producto parcial $ab+b^2$; sommando agora os dois productos parciaes, temos $a^2+2ab+b^2$, que é o producto total da multiplicação.

Operação

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \quad \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Regra geral. *Multiplica-se cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador conforme a regra dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes; e a somma algebrica de todos os productos parciaes será o producto total.*

Operar as seguintes multiplicações:

(1.)

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \qquad \\ a+b \qquad \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \qquad \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

(2.)

$$\begin{array}{r} 3a^3b+a^2b \qquad \\ 4a^2b-3ab \qquad \\ \hline 12a^5b^2+4a^4b^2 \qquad \\ -9a^4b^2-3a^3b^2 \\ \hline 12a^5b^2-5a^4b^2-3a^3b^2 \end{array}$$

3. Multiplicar $a+b$ por $x-y$. Resp. $ax-ay+bx-by$.
4. Multiplicar $a-b$ por $a-b$. » $a^2-2ab+b^2$.
5. Multiplicar $a-b$ por $a+b$. » a^2-b^2.
6. Multiplicar a^2+ac+c^2 por $a-c$. » a^3-c^3.
7. Multiplicar $m+n$ por $m-n$. » m^2-n^2.
8. Multiplicar y^2-y+1 por $y+1$. » y^3+1.
9. Multiplicar x^2+y^2 por x^2-y^2. » x^4-y^4.

10. Multiplicar a^2-3a+8 por $a+3$. Resp. a^3-a+24.
11. Multiplicar $3a+5b$ por $3a-5b$. » $9a^2-25b^2$.
12. Multiplicar a^2-ab+b^2 por $a+b$. » ?
13. Multiplicar $d-bx$ por $d-cx$. » ?
14. Multiplicar $3a^2+x$ por $2a^2+4x$. » ?

Uso do parenthesis na multiplicação

76. Se um parenthesis está unido ao signal $\times$, mostra que cada termo do parenthesis tem de ser multiplicado pelo termo a que está ligado o signal $\times$. Assim, $2a\times(a+b-c)$ ou $(a+b-c)\times 2a$ mostra que os termos a, b e c teem de ser multiplicados por $2a$; e para tirarmos o parenthesis desta expressão sem lhe alterarmos o valor, é necessario operar a multiplicação, e a expressão se transformará em $2a^2+2ab-2ac$.

77. Quando entre dois parenthesis está o signal $\times$, mostra que a quantidade contida no primeiro parenthesis deve ser multiplicada pela quantidade contida no segundo. Assim, a expressão $(a+x)\times(a-x)$ mostra que $a+x$ deve ser multiplicado por $a-x$, e o resultado desta expressão será a^2-x^2.

Nota. Nestes exemplos supprime-se sempre o signal $\times$, e escreve-se simplesmente $2a(a+b-c)$ e $(a+x)$ $(a-x)$.

Dois ou mais polynomios fechados cada um por um parenthesis, mostram que se requer o producto de todos. Assim, a expressão $(a+b)$ $(a+c)$ $(a-d)$ quer dizer $(a+b)\times(a+c)\times(a-d)$.

Tirar o parenthesis das seguintes expressões sem lhes alterar o valor:

1. $ab(a+b)$. Resp. a^2b+ab^2.
2. $(ab-3a)5$. » $5ab-15a$.
3. $a(x-y)$. » $ax-ay$.
4. $(x+y)$ $(x+y)$. » $x^2+2xy+y^2$.
5. $(a-b)$ $(a+b)$ » a^2-b^2.
6. $(5+6+3-12)x$. » $2x$.
7. $3x(a+ab-x)$. » $3ax+3abx-3x^2$.
8. $abc(a-ac)$. » $a^2bc-a^2bc^2$.
9. $(ab+cd)$ $(ab-cd)$. » $a^2b^2-c^2d^2$.
10. $(a+b)$ $(a+b)+(a-b)$ $(a-b)$. » $2a^2+2b^2$.
11. $(5+8a)2a$. » ?
12. $(x+3y)5$. » ?
13. $2x(5x-3y)$. » ?
14. $xy(a+b-3)$. » ?
15. $(a+b)$ $(a+b)$. » ?
16. $(a+2b)$ $(2-a)$. » ?
17. $2ab(x+y+z)$. » ?

78. Quando se quer indicar o quadrado de um polynomio, isto é, o producto de um polynomio multiplicado por si mesmo, fecha-se o polynomio com um parenthesis e dá-se-lhe o expoente 2; quando se quer indicar o seu cubo, dá-se-lhe o expoente 3; quando se quer indicar a quarta potencia, dá-se-lhe o expoente 4, e assim por diante. De sorte que,

$(a+b)^2=(a+b)$ $(a+b)$ ou $a^2+2ab+b^2$.
$(a+b)^3=(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$.
$(a+b)^4=(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$.

Achar o resultado das seguintes expressões:

18. $(2a+y)^2$. Resp. $4a^2+4ay+y^2$.
19. $(x-3)^3$. » $x^3-9x^2+27x-27$.
20. $(4a+5b)^2$. » ?
21. $(a+b-2c)^3$. » ?
22. $(6-4)^4$. » ?

DIVISÃO

79. Divisão em Algebra é a operação que tem por fim achar quantas vezes uma quantidade algebrica contém outra.

A quantidade que se divide, chama-se **dividendo.**

A quantidade pela qual se divide o dividendo, chama-se **divisor.**

O resultado da operação chama-se **quociente.**

A divisão é o inverso da multiplicação, e por isso, multiplicando o divisor pelo quociente, obteremos exactamente o dividendo.

A divisão indica-se escrevendo o divisor debaixo do dividendo em fórma de fracção. Assim, para indicarmos que ab deve ser dividido por a, escreveremos $\frac{ab}{a}$. Tambem se póde indicar a divisão como em Arithmetica, escrevendo o divisor á direita do dividendo, como: $ab \,|\, \underline{a}$.

Na divisão ha tres casos a considerar, que são:

1.° *Dividir um monomio por outro monomio.*
2.° *Dividir um polynomio por um monomio.*
3.° *Dividir um polynomio por outro polynomio.*

Primeiro caso da divisão

80. Na divisão, assim como na multiplicação, é necessario que o discipulo saiba, em qualquer caso, operar com os quatro dados seguintes:

1.° *O coefficiente.*
2.° *A parte litteral.*
3.° *O expoente.*
4.° *O signal.*

81. O coefficiente e a parte litteral. Para determinarmos a regra para se achar o coefficiente e a parte litteral do quociente, resolveremos os seguintes problemas:

I Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por 2?

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6ab & 2 \\ \cline{2-2} 6ab & 3ab \\ \hline 0 & \end{array}$$

Solução. Dividir $6ab$ por 2 é dividir esta quantidade em duas partes iguaes, e por isso o quociente é $3ab$. Multiplicando agora o divisor pelo quociente, temos $2 \times 3ab = 6ab$ que subtrahido do dividendo, não deixa resto.

II Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por $3ab$?

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6ab & 3ab \\ \cline{2-2} 6ab & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Solução. Em $6ab$ quantas vezes ha $3ab$? Ha 2 vezes, porque 2 vezes $3ab$ são $6ab$; então o quociente é 2.

Regra. *Divide-se o coefficiente do dividendo pelo coefficiente do divisor, e ao quociente junta-se a parte litteral do dividendo que não estiver no divisor, de sorte que, multiplicado o divisor pelo quociente, dê o dividendo.*

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{l|l} 6a & 6 \\ \cline{2-2} 6a & a \\ \hline 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{l|l} ab & a \\ \cline{2-2} ab & b \\ \hline 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{l|l} 3ab & b \\ \cline{2-2} 3ab & 3a \\ \hline 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{l|l} abx & x \\ \cline{2-2} abx & ab \\ \hline 0 & \end{array}$ (5.) $\begin{array}{l|l} 8aby & 2ay \\ \cline{2-2} 8aby & 4b \\ \hline 0 & \end{array}$

(6.) $8xy \mid 4x$ (7.) $15x \mid 3$ (8.) $18abc \mid 6abc$ (9.) $25xyz \mid 5z$ (10.) $21abcd \mid 7c$

82. O expoente. Para estabelecermos a regra para achar o expoente do quociente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o quociente da $6a^5$ dividido por $2a^2$?

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6a^5 & 2a^2 \\ \cline{2-2} 6a^5 & 3a^3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Solução. Dividindo 6 por 2, o quociente é 3. Para se dividir a^5 por a^2, acha-se a differença dos expoentes, que é $5-2=3$. Então o quociente de $a^5 \div a^2$ é $a^{5-2}=a^3$, porque $a^2 \times a^3 = a^5$. Juntando agora os coefficientes, temos $6a^5 \div 2a^2 = 3a^3$.

Demonstração. O dividendo $6a^5$ é igual a $6aaaaa$, e o divisor $2a^2$, igual a $2aa$. Ora, desde que a lettra a entra 5 vezes como factor no dividendo, e só 2 vezes no divisor, claro está que ella terá de entrar 3 vezes no quociente, para que o producto do divisor multiplicado pelo quociente dê o dividendo.

$$\begin{array}{l|l} aaaaa & aa \\ \cline{2-2} aaaaa & aaa \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como o expoente mostra quantas vezes uma lettra é tomada como factor, segue-se que a differença entre o expoente do dividendo e o do divisor será o expoente do quociente.

Regra. *Do expoente de uma lettra no dividendo subtrahindo o expoente da mesma lettra no divisor, o resto será o expoente dessa lettra no quociente.*

Nota. Quando o dividendo e o divisor são só potencias da mesma lettra, póde-se operar só com o expoente. Assim, $x^8 \div x^5 = x^{8-5} = x^3$, $x^3 \div x = x^{2-1} = x^1 = x$.

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{l|l} xy^2 & x \\ \cline{2-2} xy^2 & y^2 \\ \hline 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{l|l} ab^3 & b^3 \\ \cline{2-2} ab^3 & a \\ \hline 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{l|l} 12a^5b^2 & 3a^3b \\ \cline{2-2} 12a^5b^2 & 4a^2b \\ \hline 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{l|l} 6xy^3 & 3y^3 \\ \cline{2-2} 6xy^3 & 2x \\ \hline 0 & \end{array}$

(5.) $x^5 \mid x$ (6.) $y^4 \mid y^2$ (7.) $a^7 \mid a^5$ (8.) $x^{12} \mid x^4$

(9.) $16ab^2 \mid 4ba$ (10.) $14xy \mid 7$ (11.) $24abc^2 \mid 8ac$ (12.) $7x^3y^3 \mid xy$

83. Os signaes. A regra para os signaes na divisão é a mesma que na multiplicação. Se os dois termos da divisão tiverem signaes iguaes, o quociente será positivo; se tiverem signaes differentes, o quociente será negativo.

Demonstração. Demonstra-se este resultado com a propria regra dos signaes na multiplicação; pois, se os signaes de dois factores de uma multiplicação produzem o signal do producto, claro está que o signal do producto dividido por um dos factores, dará o signal do outro factor. De sorte que, sendo

$+a \times +b = +ab$, então $+ab \div +b = +a$.
$-a \times -b = +ab$, então $+ab \div -b = -a$.
$+a \times -b = -ab$, então $-ab \div -b = +a$.
$-a \times +b = -ab$, então $-ab \div +b = -a$.

Problema. Qual é o quociente de $-18abc$ dividido por $+6b$?

Solução. — $18abc$ dividido por $6b$, o quociente é $-3ac$. Como o signal do dividendo é —, e o signal do divisor é +, segue-se que o signal do quociente deve ser —, para que multiplicado o divisor pelo quociente dê o dividendo. Então o quociente é $-3ac$, porque $+6b \times (-3ac)$ dá $-18abc$.

Operação

$$\begin{array}{l|l} -18abc & +6b \\ \hline -18abc & -3ac \\ \hline 0 & \end{array}$$

Regra. *Se o dividendo e o divisor tiverem signaes iguaes, o quociente terá o signal +; se tiverem signaes differentes, o quociente terá o signal —.*

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{l|l} +15ax & -3x \\ \hline +15ax & -5a \\ \hline 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{l|l} -32abc & -4ab \\ \hline -32abc & +8c \\ \hline 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{l|l} +21xy^2 & +7y \\ \hline +21xy^2 & +3xy \\ \hline 0 & \end{array}$

(4.) $-27axy \mid +9a$ (5.) $33bc \mid -11c$ (6.) $+18a^3b^4 \mid 9a^2$

84. Em todos os exemplos que temos dado na divisão de monomios, o dividendo é exactamente divisivel pelo divisor; ha, porém, tres casos em que um monomio não póde ser exactamente dividido por outro monomio. Estes tres casos são:

1.° Quando o coefficiente do dividendo não é exactamente divisivel pelo coefficiente do divisor.

2.° Quando a mesma lettra tem um expoente maior no divisor que no dividendo.

3.° Quando o divisor tem uma ou mais lettras que não se acham no dividendo.

Em qualquer destes casos, indica-se a divisão escrevendo o divisor debaixo do dividendo, em fórma de fracção; e o quociente será então um monomio fraccionario, que póde ser simplificado, se o dividendo e o divisor tiverem algum factor ou divisor commum.

Antes, porém, de entrarmos neste processo, precisamos saber o que quer dizer em Algebra a palavra cancellar.

85. A palavra **cancellar** significa passar um traço ou risco sobre um algarismo ou lettra para simplificar ou reduzir o seu valor, como $\not{3}$, $\not{5}$, $\not{6}$, $\not{7}$, $\not{x}$, $\not{y}$.

O cancellamento tem muita applicação em Algebra e Arithmetica; no problema seguinte temos um exemplo:

Problema. Qual é o quociente de $15ax$ dividido por $9x^2y$?

Solução. Por tres razões o dividendo $15ax$ não póde ser dividido exactamente por $9x^2y$. Primeira, porque o coefficiente 15 não póde ser dividido pelo coefficiente 9. Segunda, porque o expoente de x é maior no divisor do que no dividendo. Terceira, porque a lettra y não se acha no dividendo. A divisão será então indicada escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo; mas, como 15 e 9 são divisiveis por 3, opera-se a simplificação, e estes dois coefficientes ficarão reduzidos a 5 e a 3. Como a lettra x é commum a ambos os termos, cancella-se no dividendo e no divisor, e ella ficará reduzida de x^2 ou $x \times x$ a x, e o quociente simplificado será $\frac{5a}{3xy}$.

Operação

$$\frac{15ax}{9x^2y} = \frac{\not{3} \times 5 \times a \times \not{x}}{\not{3} \times 3 \times \not{x} \times x \times y} = \frac{5a}{3xy}$$

Demonstração. O dividendo $15ax$ é composto de $3 \times 5 \times a \times x$, e o divisor $9x^2y$ é composto de $3 \times 3 \times x \times x \times y$. Ora, cancellando-se o mesmo factor no dividendo e no divisor, não se altera o valor do quociente. (Arith. Progressiva n.° **108**). Então cancellando os factores 3 e x, que são communs ao dividendo e ao divisor, teremos o quociente reduzido a $\frac{5a}{3xy}$. Este processo é uma simples reducção de uma fracção algebrica á sua expressão mais simples, da qual trataremos mais adeante.

Operar as seguintes divisões:

1. Dividir $6amx$ por $3abc$. Resp $\frac{mx}{bc}$.
2. Dividir $49a^2b^2$ por $14a^3b$. » $\frac{7b}{2a}$.
3. Dividir $18a^2b$ por $12a^4b^4$. » $\frac{3}{2a^2b^3}$.
4. Dividir $28a^5b^6c^7$ por $16ab^2c^3$. » $\frac{7a^4b^4}{4c}$.
5. Dividir $100a^5b^5x$ por $25a^3b^4d$. » $\frac{4a^2bx}{d}$.
6.* Dividir $121a^3b^2c^5$ por $11b^3$. » $\frac{11a^3c^5}{b}$.

86. Nos exemplos que demos para ensaiar as regras dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes, escrevemos sempre o divisor á direita do dividendo, por tres motivos:

1.° Porque a divisão ficando semelhante á da Arithmetica póde ser comprehendida mais facilmente.

2.° Porque o discipulo operando a divisão, vê logo que o divisor multiplicado pelo quociente dá exactamente o dividendo, o que é importante conhecer praticamente.

3.° Porque para operar a divisão por cancellamento, é necessario primeiro entrar na exposição deste processo, o que não convém fazer logo no começo da divisão algebrica, para evitar confusão no ensino.

87. Agora, porém, que o discipulo já sabe cancellar os factores communs ao dividendo e ao divisor, poderá facilmente resolver qualquer desses exemplos por este meio. Assim, dividindo $9abc$ por $3ab$, temos $\frac{9abc}{3ab}$; cancellando os factores communs ao dividendo e ao d i v i s o r, temos $\frac{3\times\not{3}\times\not{a}\times\not{b}\times c}{\not{3}\times\not{a}\times\not{b}}=3c$. Todos os outros exemplos apresentados podem ser resolvidos do mesmo modo.

Segundo caso da divisão

88. A divisão de um polynomio por um monomio opera-se do seguinte modo:

Problema. Dividir $ab+ac+ad$ por a.

Solução. Desde que o factor a entra em cada um dos termos do dividendo, é claro que cada termo do dividendo póde ser dividido por a. Portanto,

Operação

$$\begin{array}{l|l} ab+ac+ad & a \\ \cline{2-2} \underline{ab+ac+ad} & b+c+d \\ 0 \quad\; 0 \quad\; 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se cada termo do dividendo pelo divisor, observando as regras dos coefficientes, parte litteral, expoentes e signaes.*

Operar as seguintes divisões:

		Resp.	
1.	Dividir $6x+12y$ por 3.		$2x+4y$.
2.	Dividir $15x-20b$ por 5.	»	$3x-4b$.
3.	Dividir $21a+35b$ por -7.	»	$-3a-5b$.
4.	Dividir $6ax+9ay$ por $3a$.	»	$2x+3y$.
5.	Dividir $ab+ac$ por a.	»	$b+c$.
6.	Dividir $abc-acf$ por ac.	»	» $b-f$.
7.	Dividir $12ay-8ac$ por $-4a$.	»	$-3y+2c$.
8.	Dividir $10ax-15ay$ por $-5a$.	»	$-2x+3y$.
9.	Dividir $12bx-18x^2$ por $6x$.	»	$2b-3x$.
10.	Dividir $a^2b^2-2ab^3x$ por ab.	»	$ab-2b^2x$.
11.	Dividir $12a^2bc-9acx^2+6ab^2c$ por $3ac$.	»	$4ab-3x^2+2b^2$.
12.	Dividir $15a^5b^2c-21a^2b^3c^2$ por $3a^2bc$.	»	$5a^3b-7b^2c$.
13.	Dividir $-16by^3+4y^2$ por $4y^2$.	»	$-4by+1$.
14.	Dividir $3ab+15a^2b-27a^3b$ por $3ab$.	»	?
15.	Dividir $4a^4-20a^3+8ab$ por $4a$.	»	?

Terceiro caso da divisão

89. Para operarmos o terceiro caso da divisão algebrica, é conveniente sabermos ordenar um polynomio.

Já vimos no n.° **36** que a ordem em que escrevemos os termos de um polynomio, não altera o seu valor. Assim, $a+b$ é igual a $b+a$; do mesmo modo x^2+xy é igual a $xy+x^2$. Ha, porém, certa conveniencia em escrever os termos de um polynomio em certa ordem para facilitar a divisão e outros processos algebricos.

90. Ordenar um polynomio é pois escrever todos os seus termos de modo que os expoentes de uma lettra vão constantemente crescendo ou decrescendo. O polynomio diz-se, então, ordenado segundo as potencias crescentes ou decrescentes dessa lettra que se chama lettra ordenadora.

Para ordenar, por exemplo, o polynomio $23a^2b+5b^3+$ $+22ab^2+6a^3$, segundo as potencias decrescentes de a, toma-se o termo que tem a mais alta potencia de a, e depois, em ordem decrescente, as outras potencias de a, e teremos $6a^3+$ $+23a^2b+22ab^2+5b^3$. O expoente 3 decresce até desapparecer.

91. Para se operar uma divisão de polynomios, é conveniente ordenar tambem o divisor, isto é, escrevel-o de modo que o primeiro termo do dividendo seja exactamente dividido pelo primeiro termo do divisor, para assim facilitar a divisão. Se quizermos dividir $a^2+2ab+b^2$ por $b+a$, é mais conveniente ordenar este divisor segundo as potencias decrescentes de a e escrever $a+b$, porque é nesta ordem que as lettras a e b estão no dividendo.

Problema. Dividir $6a^2-13ax+6x^2$ por $2a-3x$.

Solução. Como o dividendo e o divisor já se acham ordenados no problema, procede-se a divisão.

Dividindo o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $3a$; multiplicando agora o divisor por este termo, temos o producto de $6a^2-9ax$, que subtrahido do dividendo, deixa o resto $-4ax$ que com o termo seguinte do dividendo faz o dividendo parcial $-4ax+6x^2$.

Dividindo agora o primeiro termo do dividendo parcial pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $-2x$. Multiplicando o divisor por este termo, temos $-4ax+6x^2$ que subtrahido do dividendo parcial, nada resta. O quociente é pois $3a-2x$.

Prova. Multiplicando o divisor pelo quociente, obtemos exactamente o dividendo, o que prova que a divisão está exacta.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6a^2-13ax+6x^2 & 2a-3x \\ \cline{2-2} \underline{6a^2-\;\;9ax} & 3a-2x \\ 0\;-\;\;4ax+6x^2 & \\ \underline{\;\;\;-\;\;4ax+6x^2} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;0 \quad\; 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a-3x \\ \underline{3a-2x} \\ 6a^2-9ax \qquad \\ \underline{-4ax+6x^2} \\ 6a^2-13ax+6x^2 \end{array}$$

Regra. *Ordenam-se o dividendo e o divisor, e depois divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, e o resultado será o primeiro termo do quociente.*

Multiplica-se o divisor por este termo do quociente, o producto subtrahe-se do dividendo, e ao resto junta-se o termo seguinte do dividendo para formar um novo dividendo parcial.

Repete-se este processo até se dividirem todos os termos do dividendo; se não houver resto, a divisão é exacta.

Operar as seguintes divisões:

(1.)

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ 6a^2-2a-8 & 2a+2 \\ \underline{6a^2+6a} & \overline{3a-4} \;\; \text{Quociente} \\ 0\ -8a-8 & \\ \underline{0\ -8a-8} & \\ \quad\ \ 0 \quad 0 & \end{array}$$

(2.)

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3y+x^2y+xy^2+2y & x+y \\ \underline{x^4+x^3y} & \overline{x^3+xy} \\ \ 0 \quad 0 \quad x^2y+xy^2 & \\ \qquad\quad\ \underline{x^2y+xy^2} & \\ \qquad\qquad 0 \quad 0 \ +2y & \end{array}$$

Nota. No segundo exemplo, a divisão não é exacta, e o quociente é mixto, porque é $x^3+xy+\frac{2y}{x+y}$.

3. Dividir $4a^2-8ax+4x^2$ por $2a-2x$	Resp.	$2a-2x$.
4. Dividir $2x^2+7xy+6y^2$ por $x+2y$.	»	$2x+3y$.
5. Dividir $x^2+2xy+y^2$ por $x+y$.	»	$x+y$.
6. Dividir $8a^4-8x^4$ por $2a^2-2x^2$.	»	$4a^2+4x^2$.
7. Dividir $ac+bc-ad-bd$ por $a+b$.	»	$c-d$.
8. Dividir $x^3+y^3+5xy^2+x^2y$ por $x^2+4xy+y^2$.	»	$x+y$.
9. Dividir $a^3-9a^2+27a-27$ por $a-3$.	»	a^2-6a+9.
10. Dividir a^3-b^3 por a^2+ab+b^2.	»	$a-b$.
11. Dividir y^3+1 por $y+1$.	»	y^2-y+1.
12. Dividir $12x^4-192$ por $3x-6$.	»	?
13. Dividir a^6-b^6 por $a+b$.	»	?
14. Dividir $4x^4-64$ por $2x-4$.	Resp.	$2x^3+4x^2+8x+16$.
15. Dividir x^4-y^4 por $x-y$.	»	$x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

THEOREMAS

92. Theorema, como já vimos no n.° **5**, é uma proposição ou enunciado que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algebricas.

Vamos dar agora alguns theoremas importantes que habilitarão os alumnos a executar com muita facilidade os pro-

cessos que multiplicam rapidamente certas quantidades, e as decompõem com igual presteza em seus factores componentes.

Estes theoremas devem ser conservados na memoria para se tirar proveito delles.

1º Theorema

93. A somma da quantidade a e b é $a+b$; quadrando agora esta somma, isto é, multiplicando-a por si mesma $(a+b)^2$ ou $(a+b)\ (a+b)$, temos o producto $a^2+2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \qquad \\ \underline{+ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

I Theorema. *O quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

O discipulo achará o quadrado das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(2+3)^2$	$4+12+9$.	5. $(2+5)^2$	?
2. $(2a+b)^2$	$4a^2+4ab+b^2$.	6. $(2m+3n)^2$	?
3. $(3x+2y)^2$	$9x^2+12xy+4y^2$.	7. $(ab+cd)^2$	?
4. $(ax+by)^2$	$a^2x^2+2abxy+b^2y^2$.	8. $(x^2+xy)^2$	?

2º Theorema

94. A differença entre as duas quantidades a e b é $a-b$; quadrando esta differença, isto é, multiplicando-a por si mesma, $(a-b)^2$ ou $(a-b)\ (a-b)$, temos $a^2-2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \qquad \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

II Theorema. *O quadrado da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, menos duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

Achar o quadrado das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5-2)^2$	$25-20+4$.	5. $(8-3)^2$	?
2. $(2a-b)^2$	$4a^2-4ab+b^2$.	6. $(ab-c)^2$	?
3. $(3x-2y)^2$	$9x^2-12xy+4y^2$.	7. $(ax-2x^2)^2$	?
4. $(x^2-y^2)^2$	$x^4-2x^2y^2+y^4$.	8. $(5a^2-b^2)^2$	?

95. O signal $\pm$ é uma combinação dos signaes $+$ e $-$, e lê-se: *mais ou menos*. Nos dois theoremas precedentes podemos conhecer praticamente o sentido deste signal algebrico.

Desde que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, e $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, podemos exprimir estas duas fórmulas em uma só, escrevendo assim:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

Esta *fórmula* quer dizer que, se tomarmos o primeiro signal $\pm$ no sentido positivo, o segundo signal $\pm$ deverá tambem ser considerado positivo; se o tomarmos no sentido negativo, o segundo signal, deverá tambem ser considerado negativo. Este signal tem por fim reduzir duas fórmulas ou duas respostas a uma só.

3º Theorema

96. Multiplicando a somma $a+b$ pela differença $a-b$, temos o producto seguinte: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, como vemos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \quad\quad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad 0 \quad -b^2 \end{array}$$

III Theorema. *O producto da somma e da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira menos o quadrado da segunda.*

Achar o producto das seguintes quantidades por meio deste theorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5+3)(5-3)$.	$25-9$.	5. $(6+2)(6-2)$.	?
2. $(2a+b)(2a-b)$.	$4a^2-b^2$.	6. $(5a+c)(5a-c)$.	?
3. $(2x+3y)(2x-3y)$.	$4x^2-9y^2$.	7. $(2ab+y)(2ab-y)$.	?
4. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.	a^4-b^4.	8. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.	?

4º Theorema

97. Se dividirmos 4 por 4, o quociente será 1, porque $\frac{4}{4}=1$. Assim, tambem, se dividirmos a^2 por a^2, o quociente será 1. Operando só com os expoentes, teremos $a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0$, isto é, a elevado á potencia zero. Logo $a^0=1$. Podemos pois formular o

$$\frac{a^2}{a^2}=1 \quad \text{mas} \quad a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0 \quad \therefore a^0=1$$

IV Theorema. *Uma quantidade elevada á potencia zero é igual á unidade ou a 1.*

Illustração. Muitas vezes na divisão dos monomios acontece que os expoentes de uma lettra sendo iguaes no dividendo e no divisor, essa lettra não apparece no quociente. Quando porém se quer conservar a lettra original que desappareceu na operação, dá-se-lhe o expoente zero e inclue-se no quociente, e deste modo, o quociente conservará a lettra sem ficar alterado.

Se dividirmos, por exemplo, x^2y^2 por xy^2, operando só com os expoentes, o resultado será $x^2y^2\div xy^2=x^{2-1}y^{2-2}=x^1y^0=x$: o quociente desta divisão é simplesmente x. Se porém incluirmos no quociente a lettra y com o expoente zero, em nada alteraremos o seu valor, porque sendo $y^0=1$, segue-se então que $x\times 1=x$, e então $xy^0=x$.

Deste modo, qualquer lettra com o expoente zero póde ser incluida em um termo sem lhe alterar o valor.

Operar as seguintes divisões, conservando no quociente todas as lettras do dividendo:

1. Dividir $6a^2b^2c^4$ por $2a^2b^2$.	Resp. $3a^0b^0c^4=3c^4$.
2. Dividir $8a^4b^3c^5$ por $4a^4b^3c$.	» $2a^0b^0c^4$.
3. Dividir $32m^3n^2y^2$ por $4m^3n^2y^2$.	» $8m^0n^0y^0$.
4. Dividir $-96a^4b^5c^2$ por $-24a^4b^5$.	» $4a^0b^0c^2$.
5. Introduzir a e b como factores em $9c^3d^2$.	» $9a^0b^0c^3d^2$.

5º Theorema

98. Se dividirmos a differença de duas potencias iguaes de duas quantidades pela differença dessas quantidades, a divisão será exacta como podemos verificar nos seguintes exemplos:

$(a^2-b^2)\div(a-b)=a+b$;
$(a^3-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2$;
$(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$;
$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$.

Daqui poderemos estabelecer o

V Theorema. *A differença de potencias iguaes de duas quantidades é sempre divisivel pela differença dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das quatro divisões precedentes.

6º Theorema

99. Se dividirmos a differença de duas potencias iguaes e pares de duas quantidades, pela somma dessas quantidades, a divisão será exacta, como podemos verificar pelos seguintes exemplos:

$(a^2-b^2)\div(a+b)=(a-b)$;
$(a^4-b^4)\div(a+b)=a^3-a^2b+ab^2-b^3$;
$(a^6-b^6)\div(a+b)=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$.

Daqui poderemos formular o

VI Theorema. *A differença de potencias iguaes e pares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das quatro divisões precedentes.

7º Theorema

100. Se dividirmos a somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades pela somma das mesmas quantidades, a divisão será exacta, como poderemos verificar nos exemplos seguintes:

$$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2;$$
$$(a^5+b^5)\div(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4;$$
$$(a^7+b^7)\div(a+b)=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6.$$

Daqui poderemos formular o

VII Theorema. *A somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das tres divisões precedentes.

DIVISORES E MULTIPLOS

101. Quando um numero divide outro sem deixar resto, chama-se **divisor** desse numero. Assim, 4 é divisor de 12, porque o divide exactamente.

O divisor de um numero chama-se tambem **factor** desse numero; de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores ou factores de 12, porque cada um desses numeros divide exactamente o numero 12.

102. Do mesmo modo a quantidade algebrica que divide exactamente outra, chama-se divisor ou factor dessa quantidade. Assim, a^2 é divisor ou factor de a^2x, porque esta quantidade se divide exactamente por a^2, pois $\frac{a^2x}{a^2}=x$.

103. Os numeros, quanto á sua divisibilidade, são ou primos ou multiplos.

Numeros primos são os que não podem ser divididos exactamente senão por si mesmos ou por 1. Assim, o numero 7 só é divisivel por 7 ou por 1.

Todos os numeros primos desde 1 até 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

Numeros multiplos são o producto de dois ou mais factores differentes, e por isso podem ser divididos exactamente por esses factores. Assim, 6 é o producto de 2 vezes 3 ou de 3 vezes 2, e por isso, além de ser divisivel por si mesmo e por 1, como os numeros primos, é ainda divisivel por 2 e por 3.

Os numeros multiplos são: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, etc.

Nota. O methodo para achar os numeros primos, e a exposição dos caracteres da divisibilidade dos numeros são pontos que se aprendem em Arithmetica. Em nossa Arithmetica Progressiva, ultima edição, elles se acham convenientemente desenvolvidos na parte competente.

Para facilitar a decomposição dos coefficientes numeraes, áquelles alumnos que não estudaram convenientemente a Arithmetica, vamos dar aqui o resumo dos mais importantes caracteres da divisibilidade dos numeros.

104. O factor de um numero é tambem factor de qualquer multiplo desse numero. Assim, se 3 divide 6, dividirá tambem 12, 18, 24, etc., que são multiplos de 6.

105. O factor commum a dois numeros divide tambem a somma e differença desses numeros. Assim, se 4 divide 12 e 16, dividirá tambem a sua somma, que é 12+16=28, e a sua differença que é 16—12=4.

106. Destes e de outros principios deduzimos os seguintes caracteres da divisibilidade dos numeros:

1.º *Todo numero par é divisivel por 2.*

Illustração. Os numeros pares terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0. Ora, todos os numeros terminados nestes algarismos são ou 2 ou multiplos de 2, e por isso são divisiveis por 2. Os numeros impares, divididos por 2, deixam sempre resto.

2.º *Todo numero, cuja somma dos seus algarismos fôr divisivel por 3, será tambem divisivel por 3.*

Illustração. A somma dos algarismos do numero 147 é 1+4+7=12. Ora, como 12 é divisivel por 3, o numero 147 tambem o é.

3.º *Todo numero, cujos dois ultimos algarismos da direita formarem um numero multiplo de 4, será tambem divisivel por 4.*

Illustração. O numero 328 compõe-se de $300+28$. Ora, 4 divide 100, sem deixar resto; e, se divide 100, divide tambem 200, 300, etc., que são multiplos de 100. Portanto, 4 dividindo, 28, divide o numero inteiro.

4.° *Todo numero que terminar em 5 ou 0, será divisivel por 5.*

Illustração. Os numeros que terminarem em 5 ou 0, são todos multiplos de 5, como 10, 15, 20, 25, 30, etc., que são divisiveis por 5.

5.° *Todo numero par divisivel por 3, será tambem divisivel por 6.*

Illustração. Os primeiros numeros pares que são divisiveis por 3, são 6, 12, 18, 24, 30, etc.; ora, todos estes numeros são multiplos de 6, e por isso são divisiveis por 6.

6.° *Todo numero, cuja somma dos seus algarismos fôr divisivel por 9, será tambem divisivel por 9.*

Illustração. O numero 4356 é divisivel por 9, porque a somma dos seus algarismos, que é $4+3+5+6=18$, é tambem divisivel por 9.

7.° *Todo numero terminado em 0 é divisivel por 10 ou por 5 e por 2.*

Illustração. Os numeros terminados em cifra só podem ser 10 ou multiplos de 10; assim, 30, 90, 130 são divisiveis por 10, e *tambem por 5 e por 2.*

8.° *Todo numero que fôr divisivel por dois numeros primos entre si, será tambem divisivel pelo seu producto.*

Illustração. Os numeros que são divisiveis por 2 e por 3, tambem o são por $2\times3=6$; os que são divisiveis por 3 e por 4, tambem o são por $3\times4=12$, etc.

107. Vê-se nestes caracteres que um numero multiplo póde ter muitos divisores ou factores. Assim, 36 é divisivel por 2, porque é numero par; é divisivel por 3, porque a somma dos seus algarismos, que é $3+6=9$, é divisivel por 3; finalmente é ainda divisivel por 4, por 6, por 9, e tambem por $3\times4=12$, e por $2\times9=18$, porque se um numero é divisivel por dois numeros primos entre si, divide-se tambem pelo seu producto (Arith. Prog., secção competente).

108. Factorar um numero é decompol-o em seus factores primos, isto é, dividil-o por todos os seus factores primos até o quociente ficar 1.

Problema. Decompôr o numero 210 em todos os seus factores primos.

Solução. Começa-se a operação, dividindo 210 pelo menor numero primo que o divida exactamente. Dividindo-se 210 por 2, o quociente é 105; dividindo-se agora 105 por 3, o quociente é 35, dividindo-se 35 por 5, o quociente é 7, e dividindo-se 7 por 7, o quociente é 1. Os factores de 210 são 2, 3, 5 e 7.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Prova, $2\times3\times5\times7=210$.

Regra. *Para acharmos todos os factores de um numero, dividiremos esse numero pelo menor numero primo que não deixe resto; dividiremos depois o quociente por outro numero primo que tambem não deixe resto; e assim continuaremos repetindo-se a divisão para cada factor tantas vezes quantas possiveis, até o quociente ficar 1. Os varios divisores serão os factores primos do numero dado.*

Decompôr os seguintes numeros em todos os seus factores primos:

1. 12...	Resp.	$2\times2\times3$	6. 20........	Resp.	?
2. 15...	»	3×5	7. 24........	»	?
3. 21...	»	3×7	8. 38........	»	?
4. 26...	»	2×13	9. 66........	»	?
5. 36...	»	$2\times2\times3\times3$	10. 100........	»	?

Decomposição das quantidades algebricas

109. As quantidades algebricas, quanto á sua decomposição, dividem-se em primas e compostas.

Quantidade prima é a que não póde ser dividida exactamente senão por si mesma ou por 1. Assim, a, $b+c$, $d+x-y$, são quantidades primas, porque não tendo outro divisor além da unidade e da propria quantidade, não podem ser factoradas ou decompostas pela divisão.

110. Quantidade composta é o producto de dois ou mais factores. Assim, a quantidade ax é o producto de $a\times x$; a quantidade $ab+ac$ é o producto de $a(b+c)$; a quantidade $2a+6a^2+8a^3$ é producto de $2a(1+3a+4a^2)$, etc. Ora, sendo estas quantidades formadas pela multiplicação de dois factores, podem tambem pela divisão ser decompostas nesses mesmos factores.

111. Um factor chama-se **primo**, quando elle é uma quantidade prima; chama-se factor **composto**, quando elle é uma quantidade composta. Se dividimos ax^2 em dois factores

a e x^2, o factor a será primo, e o factor x^2 será composto de $x \times x$. Se tomarmos ab como um factor, elle será um factor composto de $a \times b$; mas a e b, tomados separadamente, são factores primos.

112. Duas ou mais quantidades algebricas são primas entre si, quando nenhuma outra quantidade as póde dividir exactamente. Assim, ab e cd são quantidades primas entre si, porque não ha divisor que divida ambas exactamente.

113. Para decompormos um monomio, temos de factorar primeiro o seu coefficiente numeral, conforme o methodo exposto no n.° **108** e depois factorar a parte litteral.

114. A decomposição da parte litteral não offerece difficuldade alguma, porque estando cada factor litteral expresso em uma lettra ou em um expoente, só teremos de escrever cada factor do monomio separado pelo signal $\times$.

Problema. Decompôr a quantidade $15a^2b$ em seus factores primos.

Solução. O coefficiente 15 decompõe-se em 3×5; a quantidade a^2 decompõe-se em $a \times a$; juntando-se ainda o factor b, ficará $3 \times 5 \times a \times a \times b$.

$$15a^2b$$
$$3 \times 5 \times a \times a \times b$$

Regra. *Para se factorar um monomio, decompõe-se o coefficiente numeral em seus factores primos, e a estes juntam-se todos os factores litteraes do monomio, ficando cada um separado pelo signal* $\times$.

Decompôr os seguintes monomios em seus factores primos:

1. $12ab^2c$.	Resp.	$2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c$.
2. $21a^2x^3y$.	»	$3 \times 7 \times a \times a \times x \times x \times x \times y$.
3. $35abc^2x$.	»	$5 \times 7 \times a \times b \times c \times c \times x$.
4. $26x^2y^3$.	»	?
5. $39a^2m^2n$.	»	?

Decomposição dos polynomios

115. Problema. Decompôr a quantidade $x+ax$ em seus factores.

Solução. Vemos que x é factor commum aos dois termos do polynomio. Então, dividindo $x+ax$ por x, temos o quociente $1+a$. Os factores são pois, o divisor x e o quociente $1+a$. A quantidade $x+ax$ decompõe-se em $x \times (1+a)$ ou $x(1+a)$.

$$\begin{array}{l|l} x+ax & x \\ \hline x+ax & 1+a \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o polynomio pelo maior monomio que divida exactamente cada um dos seus termos.*

Então, o divisor será um factor, e o quociente será outro.

Decompôr os seguintes polynomios em seus factores:

1. $2x+2$.	Resp.	$2(x+1)$.
2. $am+ac$.	»	$a(m+c)$.
3. bc^2+bcd.	»	$bc(c+d)$.
4. $4x^2+6xy$.	»	$2x(2x+3y)$.
5. $6ax^2y+9bxy^2-12cx^2y$.	»	$3xy(2ax+3by-4cx)$.
6. $5ax^2-35ax^3y+5a^2x^3y$.	»	$5ax^2(1-7xy+axy)$.
7. $a^3cm^2+a^2c^2m^2-a^2cm^3$.	»	$a^2cm^2(a+c-m)$.
8. $a+ab+ac$.	»	?
9. $2ax+2ay+4az$.	»	?
10. $3bcx+6bcx-3abc$.	»	?

116. Para decompormos em seus factores primos um binomio ou um trinomio, producto de dois ou mais polynomios, é necessario recorrermos aos seguintes principios baseados nos theoremas que já formulamos:

1.° Um trinomio póde ser decomposto em dois factores binomios, quando os termos extremos são quadrados positivos, e o termo medio é duas vezes o producto das raizes quadradas dos extremos. Os factores serão a somma ou a differença das raizes quadradas dos termos extremos, segundo fôr mais ou menos o signal do termo medio (n.° **95**). Assim,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)\ (a+b).$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)\ (a-b).$$

2.° Um binomio que é a differença de dois quadrados, póde ser decomposto em dois factores, sendo um a somma, e o outro a differença das raizes dos dois quadrados (n. **99**). Assim,

$$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b).$$

3.° Um binomio que é a differença de potencias iguaes de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um delles a differença das duas quantidades (n.° **93**). Assim,

$$x^3-y^3=(x-y)\ (x^2+xy+y^2)$$
$$x^5-y^5=(x-y)\ (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

Neste caso, dividindo-se o binomio pelo factor conhecido, acha-se o outro factor no quociente.

4.º Um binomio que é a differença de potencias iguaes e pares de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em tres factores, um dos quaes é a somma, outro a differença das quantidades. Aqui deve entender-se que as potencias pares devem ser superiores ao quadrado (n. **99**). Assim,

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)\ (a^2+b^2)=(a+b)\ (a-b)\ (a^2+b^2).$$

Segundo este principio, o binomio a^4-b^4 póde ser decomposto nos factores $(a^2-b^2)\ (a^2+b^2)$; ora, o factor a^2-b^2 póde ser tambem decomposto em $(a-b)\ (a+b)$, e assim (a^4-b^4) póde ser decomposto nos factores $(a-b)$, $(a+b)$ e (a^2+b^2).

5.º Um binomio que é a somma de potencias iguaes e impares de duas quantidades, póde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um dos factores a somma das quantidades (n.º **100**). Assim,

$$a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2).$$
$$a^5+b^5=(a+b)\ (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Decompôr as seguintes quantidades algebricas em seus factores primos:

1. $x^2+2xy+y^2$	Resp.	$(x+y)\ (x+y)$.
2. $9a^2+12ab+4b^2$.	»	$(3a+2b)\ (3a+2b)$.
3. $4+12x+9x^2$.	»	$(2+3x)\ (2+3x)$.
4. $m^2-2mn+n^2$.	»	$(m-n)\ (m-n)$.
5. x^2-y^2.	»	$(x-y)\ (x+y)$.
6. y^2-1.	»	$(y-1)\ (y+1)$.
7. $9m^2-16n^2$.	»	$(3m-4n)\ (3m+4n)$.
8. a^5-b^5.	Resp.	$(a+b)\ (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.
9. $a^2b^2-c^2d^2$.	Resp.	?
10. $4x^2-20xz+25z^2$.	»	?
11. $a^2-2abx+b^2x^2$.	»	?
12. x^5+y^5.	»	?

117. Muitas vezes um binomio ou trinomio contém mais factores além dos que se podem conhecer pelos principios já expostos; neste caso, é necessario decompôr a quantidade em dois factores, de sorte que um dos factores seja o binomio ou trinomio nas condições de ser decomposto nos factores referidos. Assim, $a^2x-x^3=x(a^2-x^2)$; ora, a^2-x^2 decompondo-se em $(a-x)\ (a+x)$, então a^2x-x^3 se decompõe em $x(a-x)\ (a+x)$.

13. $7a^2-14ax+7x^2$	Resp.	$7(a-x)\ (a-x)$.
14. ax^2-ay^2.	»	?
15. $cm^2+2cmn+cn^2$.	»	?
16. ay^2-a.	»	?

118. Quando o primeiro termo de um trinomio é um quadrado, e o coefficiente do segundo termo é a somma de duas quantidades, cujo producto é o terceiro termo, póde ser decomposto em dois factores binomios. Assim, $a^2+7a+12$ é um trinomio que tem o primeiro termo quadrado; o coefficiente do segundo termo é a somma das quantidades $3+4=7$, cujo producto $3\times4=12$ é o terceiro termo, e por isso se decompõe em $(a+3)\ (a+4)$.

17. x^2+5x+6.	Resp.	$(x+2)\ (x+3)$.
18. x^2-5x+6.	»	$(x-2)\ (x-3)$.
19. $x^2-9x+20$.	»	$(x-4)\ (x-5)$.
20. $x^2+13x+40$.	»	$(x+5)\ (x+8)$.
21. x^2-6x+8.	»	$(x-2)\ (x-4)$.

119. A decomposição das quantidades algebricas, além de outras vantagens, auxilia a achar mais rapidamente o resultado das operações. Se quizermos, por exemplo, multiplicar $x^2+2xy+y^2$ por $x-y$, e depois dividir o producto por $x+y$, teriamos de fazer uma longa multiplicação e depois uma longa divisão, ambas as operações sujeitas a enganos. Decompondo, porém $x^2+2xy+y^2$ em seus factores $(x+y)\ (x+y)$, e indicando as operações, temos

$$\frac{(x+y)\ (x+y)\ (x-y)}{x+y}=(x+y)\ (x-y)=x^2-y^2.$$

Nesta expressão, como o factor $x+y$ é commum ao dividendo e ao divisor, elimina-se ou cancella-se em ambos os termos, e o resultado é $(x+y)\ (x-y)=x^2-y^2$ (3.º Theorema).

MAXIMO DIVISOR COMMUM

120. Divisor é uma quantidade que divide outra exactamente.

121. Divisor commum de duas ou mais quantidades é uma quantidade que as divide a todas exactamente. Assim, a é divisor commum de ax, ab e ac, porque divide exactamente essas quantidades.

122. Maximo divisor commum de duas ou mais quantidades é a maior quantidade que divide todas ellas exactamente.

123. Duas ou mais quantidades podem ter muitos divisores communs; assim, 16 e 24 teem tres divisores communs, que são 2, 4 e 8; ora, sendo 8 o maior dos tres, chama-se por isso maximo divisor commum de 16 e 24.

E' necessario que o discipulo comprehenda que 8 não é só o maximo divisor commum de 16 e 24; elle póde ser tambem maximo divisor commum de muitos outros numeros dados, como 32, 40, 48, etc.

Problema. Qual é o maximo divisor commum de $6abx$, $10acx$ e $4adx$?

Solução. Decompondo-se as tres quantidades em seus factores primos, nota-se logo que 2, a e x são as unicas quantidades que entram como factores na composição de todas ellas, e por isso 2, a e x são os divisores communs das tres quantidades. O maximo divisor commum é o producto continuado destes divisores, isto é, $2\times a\times x=2ax$.

Operação

$$6abx=2\times3\times a\times b\times x.$$
$$10acx=2\times5\times a\times c\times x.$$
$$4adx=2\times2\times a\times d\times x.$$
$$2ax.$$

Demonstração. Já vimos na secção **106**, 8.º caracter que, se um numero se dividir por dois ou mais numeros primos entre si, se dividirá tambem por qualquer producto desses numeros. Assim, se 30 se divide por 2, por 3 e por 5, dividir-se-á tambem pelos varios productos desses factores, que são $2\times3=6$, $3\times5=15$ e $2\times3\times5=30$. Não sendo 30 divisivel por nenhum outro numero primo, segue-se que o producto continuado dos divisores 2, 3 e 5 será o seu maximo divisor.

Do mesmo modo, se as quantidades $6abx$, $10acx$ e $4adx$ se dividem por 2, por a e por x, tambem serão divididas pelos productos $2\times a=2a$, $2\times x=2x$ e $2\times a\times x=2ax$. Ora, como as tres quantidades não teem nenhum outro divisor primo e commum a ellas senão 2, a e x, segue-se que o seu maximo divisor commum é $2\times a\times x=2ax$. Portanto,

O maximo divisor commum de duas ou mais quantidades é o producto continuado de todos os factores primos e communs a ellas.

Regra. *Decompõem-se as quantidades dadas em seus factores primos, e o producto continuado de todos os factores que forem communs a ellas, será o seu maximo divisor commum.*

Nota. Por abreviatura usaremos das iniciaes **M. d. c.** para significar maximo divisor commum.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $4a^2x^2$, $6a^2x$, e $10ax^3$?

Solução. Os factores communs ás tres quantidades são 2, a, a e x. O factor a sendo duas vezes factor commum, $a\times a$ ou a^2 tambem o é; e o maximo divisor commum é $2a^2x$.

$$4a^2x^2=2\times2\times a\times a\times x\times x.$$
$$6a^2x\ =2\times3\times a\times a\times x.$$
$$10a^2x\ =2\times5\times a\times a\times c\times x.$$
$$2\times a^2\times x=2a^2x.$$

Achar o **M. d. c.** das seguintes quantidades:

1. $4a^2x^2$ e $10ax^3$. Resp. $2ax^2$.
2. $9abc^3$ e $12bc^4x$. » $3bc^3$.
3. $4a^3b^2x^5y^3$ e $8a^5x^2y^2$. » $4a^3x^2y^2$.
4. $3a^4y^3$, $6a^5x^3y^5$ e $9a^6y^4z$. » $3a^3y^3$.
5. $8ax^2y^4$, $12x^5y^2$ e $24a^2x^2y^3$. » ?
6. $3axy$, $15a^2x^3z$ e $5a^2x^2y$. » ?

Achar o maximo divisor das quantidades por meio da divisão continuada

124. Podemos tambem achar o **M. d. c.** de duas ou mais quantidades por meio da divisão continuada, isto é, por uma successão de divisões seguidas.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$?

Solução. Dividindo a quantidade maior pela menor o quociente é 1, o resto é $12x$. Dividindo agora o primeiro divisor $30x$ pelo primeiro resto $12x$, o quociente é 2, e o resto $6x$. Dividindo ainda o segundo divisor pelo segundo resto, o quociente é 2, e não ha resto.

O ultimo divisor $6x$ é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$ porque não deixou resto.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 42x & 30x \\ 30x & 1 \\ \hline 12x & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30x & 12x \\ 24x & 2 \\ \hline 6x & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12x & 6x \\ 12x & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Demonstração. Temos de provar agora os dois pontos seguintes:

1.º Que $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$.

2.º Que $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Primeiro. Vamos provar que $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$. Pela ultima divisão do problema acima, vimos que $6x$ é contido 2 vezes em $12x$; ora, como $6x$ divide $12x$, dividirá tambem o producto de $12x\times2$ ou $24x$. Tambem se $6x$ é divisor de si mesmo e de $24x$, será tambem divisor da somma de $6x+24x=30x$, que é a quantidade menor.

Pela mesma razão, se $6x$ divide $12x$ e $30x$, dividirá a somma de $12x+30x=42x$, que é a quantidade maior. Logo $6x$ é um divisor commum de $30x$ e $42x$.

Segundo. Vamos agora provar que $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Se o maximo divisor commum não é $6x$ então é maior ou menor do que $6x$. Mas nós já provamos que $6x$ é um divisor commum das quantidades dadas, e por isso nenhuma quantidade menor do que $6x$ poderá ser o **M. d. c.** dellas.

Supponda que o **M. d. c.** seja maior do que $6x$, então como elle divide $30x$ e $42x$ dividirá tambem a differença de $42x-30x=12x$, e se divide $12x$, dividirá o producto de $12x\times2=24x$.

Dividindo $24x$ e $30x$ dividirá a differença destas quantidades que é $30x-24x=6x$. Ora $6x$, para não deixar fracção no quociente, só póde ser dividido por si mesmo ou por uma quantidade menor do que $6x$. Logo, $6x$ é o maximo divisor commum de $30x$ e $42x$.

Regra. *Divide-se a quantidade maior pela menor; depois divide-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, e o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto.*

O ultimo divisor será o maximo divisor commum.

Nota. Quando ha mais de duas quantidades, acha-se o **M. d. c.** das duas menores, depois o **M. d. c.** do divisor achado e da terceira quantidade, e assim por diante. De sorte que se quizermos achar o **M. d. c.** de $48a$, $72a$ e $108a$, acharemos primeiro o **M. d. c.** de $48a$ e $72a$ que é $24a$, e depois acharemos o **M. d. c.** de $24a$ e $108a$, que é $12a$. Assim, o **M. d. c.** de $48a$, $72a$ e $108a$ é $12a$.

Maximo divisor commum dos polynomios

125. Para acharmos o maximo divisor commum dos polynomios, podemos empregar os mesmos processos que já executamos para achar o maximo divisor commum dos binomios a saber:

1.º Decomposição das quantidades em seus factores primos.

2.º Divisão continuada das quantidades.

Começaremos pelo primeiro.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $a^2-2ab+b^2$ e a^2-b^2?

Solução. A primeira quantidade decompõe-se em $(a-b)\ (a-b)$, e a segunda, em $(a-b)\ (a+b)$; ora, como $(a-b)$ é o unico divisor commum a ambas, é tambem o seu maximo divisor commum (Vêde o theorema segundo e o terceiro).

A regra, como é a mesma dos monomios, não é necessario ser aqui repetida.

Operação

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)\ (a-b)$$
$$a^2-b^2=(a-b)\ (a+b)$$

Achar o **M. d. c.** dos seguintes polynomios:

		Resp.
1.	$a^2+2ab+b^2$ e a^2-b^2.	$a+b$.
2.	x^2-y^2 e x^3+y^3.	» $x+y$.
3.	$a^2x^2-4ax+4$ e $ax-2$.	» $ax-2$.
4.	$4c^2-12cx+9x^2$ e $4c^2-9x^2$.	» ?
5.	x^5+y^5 e $x^2+2xy+y^2$.	» ?
6.	b^2-4 e b^2+4b+4.	» ?
7.	$5a^2+5ax$ e a^2-x^2.	» ?
8.	x^3-c^2x e $x^2+2cx+c^2$.	?

126. Vamos achar agora o **M. d. c.** de dois polynomios por meio da divisão continuada dessas quantidades.

Problema. Qual o **M. d. c.** de $4a^3-21a^2+15a+20$ e a^2-6a+8?

Solução. Dividindo-se a quantidade maior pela menor, o quociente é $4a+3$, e o resto é $a-4$. Dividindo-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, o quociente é $a-2$, e não deixa resto. O ultimo divisor $a-4$ é o **M. d. c.** das duas quantidades.

Este processo apresenta ás vezes muita difficuldade para os discipulos, principalmente quando é necessario omittir na divisão os factores que não são communs a todas as quantidades dadas. Por isso recommendamos de preferencia o primeiro processo, ao qual juntamos os exercicios para a pratica.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 4a^3-21a^2+15a+20 & a^2-6a+8 \\ \hline & 4a+3 \\ +3a^2-17a+20 & \\ +3a^2-18a+24 & \\ \hline a-4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^2-6a+8 & a-4 \\ a^2-4a & a-2 \\ \hline -2a+8 & \\ -2a+8 & \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

MINIMO MULTIPLO COMMUM

127. Multiplo de uma quantidade é qualquer outra quantidade que a contém um exacto numero de vezes. Assim, 6 é multiplo de 2, porque contém 3 vezes o numero 2; $20x$ é multiplo de $5x$, porque contém 4 vezes $5x$.

128. Multiplo commum de duas ou mais quantidades é qualquer outra quantidade que contém todas ellas um exacto numero de vezes. Assim, $12y$ é multiplo commum de $2y$, $3y$, $4y$ e $6y$, e porque contém 6 vezes $2y$, 4 vezes $3y$, 3 vezes $4y$ ou 2 vezes $6y$, e por isso póde dividir-se exactamente por todas estas quantidades.

129. Minimo multiplo commum de duas ou mais quantidades é a menor quantidade que contém cada uma dellas um exacto numero de vezes. Assim, $10x$ é o minimo multiplo commum de $2x$ e $5x$, porque nenhuma outra quantidade menor do que $10x$, poderá conter exactamente estas quantidades um exacto numero de vezes.

Duas ou mais quantidades teem um numero illimitado de multiplos communs; assim, os multiplos communs de 4 e 6 são 12, 24, 36, 48, 60 e todos os numeros que forem crescendo nesta progressão. Ora, é evidente que 12 é o menor de todos, e por isso 12 é o minimo multiplo commum de 4 e 6.

130. Qualquer quantidade contém outra um exacto numero de vezes, se tiver todos os factores primos dessa quantidade. Assim, 30 contém o numero 6 cinco vezes exactas, porque sendo composto de $2\times3\times5$, tem os factores 2 e 3 de que se compõe o numero 6. $(2\times3=6)$. Portanto, *para que uma quantidade contenha outra exactamente, bastará sómente que ella tenha todos os factores primos dessa quantidade.*

131. Para que qualquer quantidade contenha exactamente duas ou mais quantidades, é necessario que ella contenha todos os differentes factores primos dessas quantidades. E para ser a menor quantidade que exactamente as contenha, deve não ter nenhum outro factor além dos que tiverem essas quantidades; e por isso o *minimo multiplo commum de duas ou mais quantidades tem todos os differentes factores primos dessas quantidades e não contém nenhum outro factor.*

O minimo multiplo commum de a^2bc e acx é a^2bcx, porque tem todos os factores de cada uma dessas quantidades, e não contém nenhum outro factor estranho.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciaes **M. m. c.** para significar minimo multiplo commum.

Problema. Qual é o **M. m. c.** de a^2x, bx e abc?

Solução. Escrevem-se as quantidades a^2x, bx e abc em linha e sublinham-se. Vê-se logo que o factor a é divisor de duas dellas. Escreve-se a como divisor ao lado direito, e dividem-se as duas quantidades a^2x e abc pelo factor a, e os quocientes ax e bc, e a quantidade bx, que não póde ser dividida por a, escrevem-se em baixo da linha para nova divisão.

Nestes novos termos vê-se que b é factor de bx e bc; dividem-se então estes dois termos por b, e os quocientes x e c escrevem-se debaixo bem como o termo ax que não póde ser dividido por b. Assim se continúa a dividir todos os termos pelos seus divisores, até que todos fiquem reduzidos a 1.

Os factores primos destas tres quantidades são a, b, x, a e c; o minimo multiplo commum é pois o producto de todos estes factores, isto é, $a\times b\times x\times a\times c=a^2bcx$.

Operação

a^2x,	bx,	abc	a
ax,	bx,	bc	b
ax,	x,	c	x
a,	1,	c	a
1,	1,	c	c
1,	1,	1	

$$a\times b\times x\times a\times c=a^2bcx$$

Demonstração. Para que a^2bcx seja o minimo multiplo commum de a^2x, bx e abc, é necessario que contenha todos os factores primos destas tres quantidades, e nenhum outro factor além delles. Examinando estas tres quantidades, vemos que os seus differentes factores são a, a, b, c e x. Ora, todos estes factores se acham contidos em a^2bcx; além disso vemos tambem que esta quantidade não tem nenhum outro factor além de a, a, b, c e x; logo a^2bcx é o menor multiplo commum de a^2x, bx e abc.

Regra. *Para se achar o* **M. m. c.** *de duas ou mais quantidades, escrevem-se todas em linha separadas por virgulas e sublinham-se. Acha-se um factor primo que divida exactamente uma dessas quantidades, e escrevem-se debaixo os quocientes, bem como as quantidades que não forem exactamente divisiveis por elle.*

Divide-se esta nova linha de quantidades por um factor primo, que divida uma ou mais quantidades, e assim se procede em seguida; e as quantidades primas dividem-se por si mesmas, para que todos os factores fiquem á direita, e todos os quocientes sejam 1. O continuado producto de todos os factores primos será o **M. m. c.**

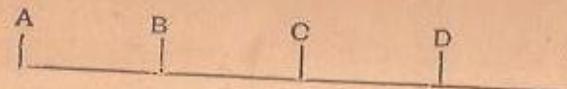
Nota. Quando duas ou mais quantidades são primas entre si, o **M. m. c.** de todas ellas é o seu producto continuado. Assim, o **M. m. c.** de ab, cd e xy é $abcdxy$.

O discipulo deve estudar este processo em nossa Arithmetica Progressiva, para saber achar facilmente o minimo multiplo commum dos numeros.

Achar o minimo multiplo commum.

1. de $4a^2$, $3a^2x$ e $6ax^2y^3$. Resp. $12a^2x^2y^3$.
2. de $12a^2x^2$, $6a^3$ e $8x^4y^2$. » $24a^3x^4y^2$.
3. de $18c^2nz^2$, $9n^4z$ e $12c^3n^2z^3$. » $36c^3n^4z^3$.
4. de 15, $6xz^2$, $9x^2z^4$ e $18cx^3$. » $90cx^3z^4$.
5. de $6a$, $5a^2b$ e $25abc^2$. » ?
6. de $3a^2b$, $9abc$ e $27a^2x^2$. » ?
7. de $4a^2x^2y^2$, $8a^3xy$, $16a^4y^3$ e $24a^5y^4x$. » ?
8. de $3a^3b^2$, $9a^2x^2$, $18a^4y^3$ e $3a^2y^2$. » ?

FRACÇÕES ALGEBRICAS

132. Em Arithmetica, uma fracção é uma ou mais partes iguaes de uma unidade ou de um todo.

Assim, se tomarmos, por exemplo, a linha **A E**, e a dividirmos em quatro partes iguaes, qualquer numero destas partes será uma fracção da linha. Assim, a parte entre **A** e **B** é um quarto da linha; as partes entre **A** e **C** são dois quartos da linha; as partes entre **A** e **D** são tres quartos da linha, e as partes entre **A** e **E** são quatro quartos da linha ou a linha inteira.

133. Exprime-se a fracção com dois numeros separados por um risco horisontal, como $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, que se lêem: um quarto, dois quartos, tres quartos, quatro quartos.

134. Estes dois numeros chamam-se **termos** da fracção; o termo de baixo chama-se **denominador**, e mostra em quantas partes foi dividida a unidade; o termo de cima chama-se **numerador**, e mostra quantas partes da unidade contém a fracção. Assim, $\frac{3}{4}$ mostra que a unidade foi dividida em 4 partes iguaes, e que a fracção contém 3 dessas partes.

$$\begin{array}{ll}\textbf{Numerador} & 3 \\ \hline \textbf{Denominador} & 4\end{array}$$

135. Em Algebra, uma fracção é considerada como o quociente de uma divisão, na qual o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor. Assim, se dividirmos 3 por 4, o quociente será $\frac{3}{4}$, isto é, a quarta parte de 3, e por isso esta fracção se lê, em algebra: «*tres dividido por quatro*».

136. A fracção algebrica é pois o resultado da divisão do numerador pelo denominador e lê-se como se estes termos estivessem separados pelo signal $\div$. Assim,

$\frac{a}{b}$ lê-se: «*a dividido* por *b*».

$\frac{2a+x}{6c}$ lê-se: «dois *a* e mais *x* divididos por seis *c*».

$\frac{2d}{x-y}$ lê-se: «dois *d* divididos por *x* e menos *y*».

137. Quantidade inteira é a que contém uma ou mais unidades exactamente: como 6, $3ab$, $15x$, etc.

138. Quantidade mixta é a que contém uma ou mais unidades e uma fracção; como $a+\frac{x}{y}$, $2ab-\frac{b}{c}$, etc.

139. Ha cinco theoremas que são communs ás fracções algebricas e ás fracções arithmeticas, e por isso devemos conhecel-os perfeitamente. Estes theoremas são os seguintes:

140. Theorema I. *Se multiplicarmos o numerador por um numero inteiro, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção ficará multiplicado por esse numero.*

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de $\frac{2}{7}$ por 3 sem alterarmos o denominador, teremos $\frac{6}{7}$. Ora, $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{7}$ teem o mesmo denominador e portanto exprimem partes do mesmo tamanho; mas $\frac{6}{7}$ tem 3 vezes o numerador de $\frac{2}{7}$ e é por conseguinte, 3 vezes maior. O mesmo se póde demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{2\times 3}{7}=\frac{6}{7}.$$

141. Theorema II. *Se dividirmos o numerador de uma fracção por um numero, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção fica dividido por esse numero.*

Demonstração. Se dividirmos o numerador de $\frac{4}{5}$ por 2, teremos $\frac{2}{5}$. Ora, $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ teem o mesmo denominador, e por isso exprimem partes do mesmo tamanho. Mas o numerador de $\frac{2}{5}$ é só a metade do numerador de $\frac{4}{5}$ e deste modo exprime só a metade das partes que teem $\frac{4}{5}$ e por isso ficou na metade do seu valor. O mesmo se póde demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{4\div 2}{5}=\frac{2}{5}.$$

142. Theorema III. *Se multiplicarmos o denominador de uma fracção por um numero inteiro, sem alterarmos o numerador, o valor da fracção ficará dividido por esse numero.*

Demonstração. Se multiplicarmos o denominador de $\frac{3}{4}$ por 2, teremos $\frac{3}{8}$. Ora, cada uma dessas fracções tem o mesmo numerador, e por isso ambas exprimem o mesmo numero de partes. Mas, na segunda fracção as partes teem a metade do tamanho das da primeira fracção, porque aquellas são quartos e estas são oitavos, e deste modo o valor da segunda fracção é a metade do da primeira. O mesmo se póde demonstrar com qualquer outra fracção.

$$\frac{3}{4\times 2}=\frac{3}{8}.$$

143. Theorema IV. *Se dividirmos o denominador de uma fracção por um numero inteiro, sem alterarmos o numerador, o valor da fracção virá multiplicado por esse numero.*

Demonstração. Se dividirmos o denominador de $\frac{2}{9}$ por 3, teremos $\frac{2}{3}$. Ora, as fracções $\frac{2}{9}$ e $\frac{2}{3}$ tendo numeradores iguaes, exprimem o mesmo numero de partes da unidade; mas como as partes da primeira fracção são nonos, e as da segunda são terços, e como cada terço é igual a tres nonos, segue-se que o valor da segunda fracção será o triplo do da primeira.

$$\frac{2}{9\div 3}=\frac{2}{3}.$$

144. Theorema V. *Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a fórma dessa fracção, mas não lhe alteraremos o valor.*

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, o seu valor virá multiplicado por esse numero (Theor. I.) e se multiplicarmos o denominador ainda por esse numero, o valor da fracção ficará dividido por esse mesmo numero. (Theor. II.) Ora, desde que o accrescimo da multiplicação do numerador é igual ao decrescimo da multiplicação do denominador, segue-se que o valor da fracção não ficará alterado.

Tambem se dividirmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, o valor da fracção diminuirá na razão das unidades do divisor; (Theor. II.) e se dividirmos o denominador, o valor crescerá na mesma razão. (Theor. IV.) Se ambos os termos forem divididos pelo mesmo numero, a diminuição da divisão do numerador será igual ao augmento da divisão do denominador, e assim, o valor da fracção ficará inalterado. Vêde o capitulo denominado Demonstrações algebricas, onde este ponto se acha demonstrado algebricamente.

145. Muitas vezes uma fracção algebrica exprime tambem um certo numero de fracções iguaes; assim, a fracção $\frac{4}{5}$ póde ser considerada $\frac{1}{5}$ tomado 4 vezes, $\frac{1}{5}\times 4=\frac{4}{5}$; a fracção $\frac{a}{b}$ póde ser considerada $\frac{1}{b}$ tomada *a* vezes, pois $\frac{1}{b}\times a=\frac{a}{b}$.

146. Antes de entrarmos nos diversos processos das fracções algebricas, devemos conhecer perfeitamente as quatro transformações por que pode passar uma fracção sem que o seu valor se altere.

Estas transformações são as seguintes:

1.º Reduzir fracções á expressão mais simples.

2.º Transformar fracções em quantidades inteiras ou mixtas.

3.º Transformar quantidades inteiras ou mixtas em fracções.

4.º Reduzir fracções ao minimo denominador commum.

Reduzir fracções algebricas á expressão mais simples

147. Reduzir uma fracção algebrica á sua expressão mais simples é cancellar ou supprimir os factores communs ao numerador e denominador, para tornal-a mais simples, mas com o mesmo valor.

148. As fracções algebricas que tiverem factores communs ao numerador e ao denominador, podem ser reduzidas a uma expressão mais simples; assim, $\frac{ax}{ay}$ póde ser reduzida a $\frac{x}{y}$, porque o factor a é commum a ambos os termos. As fracções que não tiverem factores communs, não podem ser reduzidas; assim, $\frac{a}{b}$ e $\frac{ax}{by}$ não podem ser simplificadas.

Problema. Reduzir $\frac{5ab^2}{15abx^3}$ á sua expressão mais simples.

Solução. Decompondo os dois termos da fracção em seus factores primos, vemos que os factores 5, a e b são communs ao numerador e ao denominador. Cancellando estes factores communs, a fracção ficará reduzida a $\frac{b}{3x^2}$.

$$\frac{5ab^2}{15abx^3} = \frac{\not 5\times\not a\times\not b\times b}{3\times\not 5\times\not a\times\not b\times x\times x} = \frac{b}{3x^2}$$

Demonstração. Cancellar no numerador os factores 5, a e b é o mesmo que dividir este termo por $5ab$. Cancellar tambem no denominador os factores 5, a e b é o mesmo que dividil-o por $5ab$. Ora, dividindo-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero ou quantidade, não se altera o valor da fracção como ficou demonstrado no n. **144**.

Na solução deste problema, vemos que 5, a e b são os unicos factores primos communs ao numerador e ao denominador, e por isso o producto $5ab$ é o **M. d. c.** dos dois termos da fracção (n. **124**). Temos portanto as duas regras seguintes para a reducção de fracções.

Regra. *Para se reduzir uma fracção algebrica á sua expressão mais simples, cancellam-se todos os factores communs ao numerador e ao denominador.*

Ou então

Dividem-se ambos os termos da fracção pelo seu maximo divisor commum.

Reduzir cada uma das seguintes fracções á sua expressão mais simples:

1. $\frac{4a^2x^3}{6a^3}$. Resp. $\frac{2x^3}{3a}$.
2. $\frac{6a^2x^3}{8ax^4}$. » $\frac{3a}{4x}$.
3. $\frac{6a^4x^2}{8a^2xy^4}$. » $\frac{3a^2x}{4y^4}$.
4. $\frac{9x^4y^3z^5}{12x^4y^4z^4}$. » $\frac{3z}{4y}$.
5. $\frac{4abcy}{12abc}$. » $\frac{y}{3}$.
6. $\frac{18a^2b}{3ac}$. » $\frac{6ab}{c}$.
7. $\frac{3xy}{9x^2y}$. Resp. ?
8. $\frac{12a^3bc^3}{4abc^2}$. » ?
9. $\frac{17b^2cxy}{51b^2cxy}$. » ?
10. $\frac{60a^2b^3c^2d^3}{48a^3b^4c^3d}$. » ?
11. $\frac{12a^4b^3x}{18a^3b^2y}$. » ?
12. $\frac{4ax^2}{5a^2bx^2}$. » ?
13. Simplificar $\frac{4a^2+6a^4}{10a^2b^2+8a^2c}$ Resp. $\frac{4a^2+6a^4}{10a^2b^2+8a^2c} = \frac{2a^2(2+3a^2)}{2a^2(5b^2+4c)} = \frac{2+3a^2}{5b^2+4c}$
14. Simplificar $\frac{2a^2cx^2+2acx}{10ac^2x}$. Resp. $\frac{ax+1}{5c}$.
15. Simplificar $\frac{8a^2b}{12ab^2+4abc}$. » $\frac{2a}{3b+c}$.
16. Simplificar $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$. » $\frac{x+y}{x-y}$.
17. Simplificar $\frac{a+1}{a^2+2a+1}$. » $\frac{1}{a+1}$.
18. Simplificar $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$. » $\frac{a+b}{a-b}$.

Transformar fracções algebricas em quantidades inteiras ou mixtas

149. Muitas vezes uma expressão algebrica tem a fórma de uma fracção, mas contém uma quantidade inteira ou mixta; é necessario pois saber dar a esta expressão fórma inteira ou mixta.

Problema. Transformar $\frac{3ax+b^2}{x}$ em uma quantidade inteira ou mixta.

Solução. Desde que o numerador é um dividendo, e o denominador um divisor, divide-se aquelle por este, isto é, divide-se $3ax+b^2$ por x; o quociente $3a$ será a parte inteira. O resto b^2, como não se póde dividir por x, escreve-se em fórma de fracção e junta-se á parte inteira, que ficará $3a+\frac{b^2}{x}$.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 3ax+b^2 & x \\ \hline 3ax & 3a+\frac{b^2}{x} \\ \overline{0} & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo denominador, e o quociente será a parte inteira; se houver resto, escreve-se sobre o divisor como parte fraccionaria, e junta-se á parte inteira.*

Reduzir as seguintes fracções a quantidades inteiras ou mixtas:

1.	$\frac{ab+b^2}{a}$.	Resp. $b+\frac{b^2}{a}$	7.	$\frac{ax-a^2}{a}$.	Resp. ?
2.	$\frac{cd-d^2}{d}$.	» $c-d$.	8.	$\frac{ab-2a^2}{b}$.	» ?
3.	$\frac{a^2-x^2}{a+x}$.	» $a-x$.	9.	$\frac{a^3-x^3}{a+x}$.	» ?
4.	$\frac{2a^2x-x^3}{a}$.	» $2ax-\frac{x^3}{a}$.	10.	$\frac{x^3-y^3}{x-y}$.	» ?
5.	$\frac{4ax-2x^2-a^2}{2a-x}$.	» $2x-\frac{a^2}{2a-x}$.	11.	$\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.	» ?
6.	$\frac{ax-x^2}{x}$	» $a-x$.	12.	$\frac{2a+4b+c}{2}$	» ?

Dar a uma quantidade mixta a forma de fracção

150. Problema. Transformar $a+\frac{b}{c}$ em uma fracção.

Solução. Multiplicando-se a parte inteira pelo denominador da fracção ficará ac, isto é, c vezes maior; mas dando-se-lhe o denominador c, ficará com o seu valor primitivo, e na fórma de fracção. Juntando-se agora a fracção $\frac{b}{c}$, ficará $\frac{ac+b}{c}$.

Operação

$$a+\frac{b}{c}=$$
$$=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

Regra. *Multiplica-se a parte inteira pelo denominador da fracção, e junta-se ao numerador com o signal competente, e o resultado escreve-se sobre o denominador.*

151. Antes de resolvermos os exercicios deste processo, precisamos reflectir sobre o modo por que temos de operar com os signaes das fracções, para não acharmos difficuldade alguma.

Os signaes prefixos aos termos de uma fracção dominam só esses termos; e o signal prefixo á fracção domina a fracção inteira. Assim, na fracção $-\frac{a^2-b^2}{x+y}$, o signal de a^2 que é o primeiro termo do numerador, é *mais* subentendido; o signal de b^2 é *menos;* o signal de ambos os termos do denominador é *mais;* mas o signal da fracção, tomada como um todo, é *menos.*

Como uma fracção póde estar unida á parte inteira pelo signal *mais* ou pelo signal *menos*, precisamos saber operar com os signaes, quando dermos a uma quantidade mixta uma fórma fraccionaria.

Vamos resolver os dois casos seguintes:

1.º Caso. Transformar $3a+\frac{ax-a}{x}$ em uma fracção.

Solução. Neste caso, como o signal que liga a fracção á parte inteira é +, não ha difficuldade alguma, porque os signaes dos termos da fracção se conservam.

$$3a+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax}{x}+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax+ax-a}{x}=\frac{4ax-a}{x}.$$

2.º Caso. Transformar $4a-\frac{a-b}{3c}$ em uma fracção.

$$4a-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac}{3c}-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac-(a-b)}{3c}=\frac{12ac-a+b}{3c}.$$

Solução. Neste caso, como a fracção está unida á parte inteira pelo signal —, é necessario que, quando juntarmos o numerador da fracção ao numerador da parte inteira, troquemos os signaes de todos os termos do numerador da fracção (Vêde n. **60**).

Transformar as seguintes quantidades mixtas em fracções:

1.	$5c+\frac{a-b}{2x}$.	Resp. $\frac{10cx+a-b}{2x}$.
2.	$5c-\frac{a-b}{2x}$.	» $\frac{10cx-a+b}{2x}$.
3.	$3x+\frac{c-d}{xy}$.	» $\frac{3x^2y+c-d}{xy}$.
4.	$3x-\frac{4x^2-5}{5x}$.	» $\frac{11x^2+5}{5x}$.
5.	$8y+\frac{3a-y^2}{5y}$.	» $\frac{39y^2+3a}{5y}$.

6. $x+y+\frac{x}{x+y}$. Resp. $\frac{x^2+2xy+y^2+x}{x+y}$.

7. $z-1+\frac{1-a}{1+z}$. » $\frac{z^2-a}{z+1}$.

8. $2\frac{4y}{2x+z}-5$. » $\frac{4y-10x-5z}{2x+z}$.

9. $3a^2x-\frac{a^2x^2-a^3}{x}$. » $\frac{2a^2x^2+a^3}{x}$.

10. $a+x+\frac{a^2+x^2}{a-x}$. » $\frac{2a^2}{a-x}$.

152. Problema. Transformar $5x$ em uma fracção com o denominador ab.

Solução. $5x$ transformado em uma fracção fica $\frac{5x}{1}$; multiplicando agora ambos os termos desta fracção por ab, temos $\frac{5abx}{ab}$.

Já sabemos que multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, não se altera o valor da fracção; logo $5x=\frac{5abx}{ab}$

Operação

$$5x=\frac{5x}{1}$$

$$\frac{5x}{1}\times\frac{ab}{ab}=\frac{5abx}{ab}$$

Regra. *Transforma-se a quantidade inteira em uma fracção com o denominador 1, e multiplicam-se ambos os seus termos pelo denominador dado.*

1. Transformar $3ax$ em uma fracção que tenha o denominador b. Resp. $\frac{3abx}{b}$.

2. Transformar $3xy$ em uma fracção que tenha o denominador $2a$. Resp. $\frac{6axy}{2a}$.

3. Transformar $a+b$ em uma fracção que tenha o denominador $a-b$. Resp. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

4. Transformar $2x^2y$ em uma fracção que tenha o denominador $3a^2-2b$. Resp. $\frac{6a^2x^2y-4bx^2y}{3a^2-2b}$.

Reduzir fracções a um denominador commum.

153. Reduzir duas ou mais fracções a um denominador commum é dar a todos um denominador igual sem lhes alterar o valor.

Esta reducção é baseada no seguinte principio já demonstrado no n.º **144**:

Multiplicando-se ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, muda-se a fórma da fracção, mas não se lhe altera o valor.

154. Tomando as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$, vemos que ellas teem denominadores differentes; multiplicando agora ambos os termos de $\frac{a}{b}$ por y, no que não lhe alteraremos o seu valor, teremos $\frac{ay}{by}$; multiplicando tambem ambos os termos de $\frac{x}{y}$ por b, teremos $\frac{bx}{by}$. Deste modo obteremos as duas fracções $\frac{ay}{by}$ e $\frac{bx}{by}$, do mesmo valor que as primeiras, e com denominadores iguaes.

Neste exemplo, vemos que o denominador commum deve ser multiplo dos denominadores dados, pois by é multiplo de b e de y.

Problema. Reduzir $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{x}{y}$ a um denominador commum.

Solução. O denominador commum é $b\times d\times y=bdy$.

Multiplicando o numerador da primeira fracção pelos denominadores das outras, teremos ady que é o numerador correspondente á primeira fracção. Multiplicando o numerador da segunda fracção pelos denominadores das outras, teremos $c\times b\times y=bcy$ que é o numerador correspondente á segunda fracção. Multiplicando o numerador da terceira fracção pelos denominadores das outras, teremos $x\times b\times d=bdx$, que é o numerador correspondente á terceira fracção.

Operação

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{x}{y}.$$

$$\frac{ady}{bdy},\ \frac{bcy}{bdy},\ \frac{bdx}{bdy}.$$

Regra. *Multiplicam-se entre si os denominadores, e o producto será o denominador commum.*

Multiplica-se depois o numerador de cada fracção pelos denominadores das outras; e o producto será o numerador correspondente a essa fracção.

Reduzir cada um dos seguintes grupos de fracções a um denominador commum:

1. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{1}{2}$. Resp. $\frac{2ad}{2bd}$, $\frac{2bc}{2bd}$ e $\frac{bd}{2bd}$.

2. $\frac{x}{y}$ e $\frac{a+x}{c}$. » $\frac{cx}{cy}$ e $\frac{xy+ay}{cy}$.

3. $\frac{2}{3}$, $\frac{3a}{4}$ e $\frac{x+y}{b}$. » $\frac{8b}{12b}$, $\frac{9ab}{12b}$, $\frac{12x+12y}{12b}$.

4. $\frac{2x}{3y}$, $\frac{3x}{5z}$ e a. » $\frac{10xz}{15yz}$, $\frac{9xy}{15yz}$ e $\frac{15ayz}{15zy}$.

5. $\frac{a}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{z}$. » $\frac{ayz}{xyz}$, $\frac{x^2z}{xyz}$ e $\frac{xy^2}{xyz}$.

6. $\frac{a}{c}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{3}{4}$. Resp. ?

7. $\frac{c}{d}$, $\frac{b}{x}$ e $\frac{d}{4}$. » ?

8. $\frac{2a}{3b}$ e $\frac{x}{a+b}$. » ?

9. $\frac{xy}{z}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2a}{b}$. » ?

Achar o minimo denominador commum

155. Já sabemos achar um denominador commum, mas não sabemos ainda achar o menor de todos, isto é, **o minimo denominador commum** que tem a grande vantagem de deixar as fracções reduzidas a seus termos menores.

156. Quando todos os denominadores das fracções dadas são quantidades primas entre si, o minimo denominador commum de todas ellas é o seu producto continuado, como fizemos na secção n.° **154**. Assim, nas fracções $\frac{a}{b}$, $\frac{2}{x}$ e $\frac{c}{y}$, o minimo denominador commum é $b \times x \times y = bxy$. Mas, quando as fracções teem denominadores com factores communs, o producto continuado desses factores não é o seu minimo denominador commum. Assim, nas fracções $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$, o minimo denominador commum não é $xy \times xz \times yz = xxyyzz$ ou $x^2y^2z^2$, mas sim xyz; pois desde que o denominador commum de dois ou mais denominadores dados é um multiplo dessas quantidades, segue-se que o minimo denominador deve ser o seu minimo multiplo commum (Vêde o n.° **129**).

Problema. Reduzir $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$ ao minimo denominador commum.

Solução. Acha-se o minimo multiplo commum dos denominadores xy, xz e yz (n. **131**). O minimo multiplo commum é xyz que se escreve como denominador commum das tres fracções do seguinte modo:

$$\frac{\quad}{xyz}, \frac{\quad}{xyz}, \frac{\quad}{xyz},$$

Divide-se esse denominador commum pelo denominador da primeira fracção, e o quociente multiplica-se pelo seu numerador, e obtem-se $xyz \div xy = z$; então $z \times a = az$ que é numerador correspondente á primeira fracção. Os numeradores das outras fracções acham-se por um processo identico. Assim,
$xyz \div xz = y$, então $y \times b = by$, numerador da 2.ª fracção.
$xyz \div yz = x$; então $x \times c = cx$, numerador da 3.ª fracção.

Operação

$$\frac{a}{xy}, \frac{b}{xz}, \frac{c}{yz},$$

$$\frac{az}{xyz}, \frac{by}{xyz}, \frac{cx}{xyz},$$

Regra. *Acha-se o minimo multiplo commum dos denominadores, e escreve-se como denominador commum das fracções dadas.*

Divide-se este denominador commum pelo denominador de cada fracção e o quociente multiplicado pelo numerador primitivo dará o numerador correspondente.

Reduzir as fracções de cada um dos seguintes grupos ao seu minimo denominador commum:

		Respostas
1.	$\frac{cd}{ab}$, $\frac{2x}{3a}$ e $\frac{xy}{ac}$.	$\frac{3c^2d}{3abc}$, $\frac{2bcx}{3abc}$ e $\frac{3bxy}{3abc}$.
2.	$\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ e $\frac{x}{y}$.	$\frac{6ay}{12y}$, $\frac{4by}{12y}$, $\frac{3cy}{12y}$ e $\frac{12x}{12y}$.
3.	$\frac{2a}{3bc}$, $\frac{3x}{cd}$ e $\frac{5y}{6bd}$.	$\frac{4ad}{6bcd}$, $\frac{18bx}{6bcd}$ e $\frac{5cy}{6bcd}$.
4.	$\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x-y}{x+y}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.	$\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$, $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
5.	$\frac{a^2c}{ab}$, $\frac{2cd}{b^2c}$ e $\frac{x^2y}{4bc}$.	?
6	$\frac{2a}{4b}$, $\frac{cd}{bc}$ e $\frac{x^2y}{bcx}$.	?
7.	$\frac{m+n}{3a^2}$, $\frac{m-n}{2ax^2}$ e $\frac{m^2}{4cx}$.	?
8.	$\frac{x}{ac}$, $\frac{m}{b^2c}$ e $\frac{y}{c^2d}$.	?

Addição de fracções

157. Quando duas ou mais fracções teem um denominador commum representam varios numeros de partes iguaes da mesma unidade, ou do mesmo todo; neste caso, para se achar a somma destas fracções, bastará addicionar os seus numeradores. Assim, $\frac{2}{7}$ mais $\frac{3}{7}$ são $\frac{5}{7}$; do mesmo modo, $\frac{2x}{y} + \frac{3x}{y} = \frac{5x}{y}$

Problema. Qual é a somma de $\frac{7b}{m}$, $\frac{4b}{m}$, $\frac{8b}{m}$.

Solução. Como as tres fracções teem um denominador commum, addicionam-se os numeradores que são $7b + 4b + 8b = 19b$, e a somma $19b$ escreve-se sobre o denominador commum.

Operação

$$\frac{7b}{m} + \frac{4b}{m} + \frac{8b}{m} = \frac{19b}{m}$$

Regra. *Addicionam-se os numeradores, e a somma escreve-se sobre o denominador commum.*

Problema. Qual é a somma de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ e $\frac{x}{6}$?

Solução. Como os denominadores são differentes, temos de reduzir primeiro as tres fracções a um denominador commum, e depois procederemos como no problema precedente. A somma é $\frac{11x}{12}$.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{6x}{12}+\frac{3x}{12}+\frac{2x}{12}=?$$

$$\frac{6x+3x+2x}{12}=\frac{11x}{12}$$

Regra. *Reduzem-se as fracções a um denominador commum, e depois escreve-se a somma dos numeradores sobre elle.*

Exercicios para sommar:

		Respostas
1.	$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=?$	$\frac{4a}{2}=2a.$
2.	$\frac{3ac}{2xy}+\frac{11ac}{2xy}+\frac{8ac}{2xy}+\frac{5ac}{2xy}=?$	$\frac{27ac}{2xy}.$
3	$\frac{2b+c}{x}+\frac{3b-c}{x}=?$	$\frac{5b}{x}.$
4.	$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6}=?$	$a.$
5.	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=?$	$\frac{6x+4y+3z}{12}.$
6.	$\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}+\frac{5x}{6}=?$	$\frac{143x}{60}=2x+\frac{23x}{60}.$
7.	$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=?$	$x.$
8.	$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=?$	$\frac{2a}{a^2-b^2}.$
9.	$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=?$	?
10.	$\frac{5+x}{y}+\frac{3-ax}{ay}+\frac{b}{3a}=?$	?
11.	$2x+3x+\frac{3z}{5}+x+\frac{2z}{9}=?$	$6x+\frac{37z}{45}.$
12.	$3+\frac{2a}{x}+5+\frac{3a}{x}=?$	?

Subtracção de fracções

158. Quando duas fracções teem um denominador commum, opera-se a subtracção achando a differença entre os numeradores. Assim, de $\frac{3a}{c}$ subtrahindo $\frac{2a}{c}$, resta $\frac{a}{c}$.

Problema. De $\frac{a}{b}$ subtrahindo $\frac{c}{d}$ quanto resta?

Solução. Como as duas fracções teem um denominador commum, acha-se a differença entre a e c que é $a-c$, e escreve-se sobre b, e ficará $\frac{a-c}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Problema. Subtrahir $\frac{3a}{2}$ de $\frac{7a}{3}$.

Solução. Reduzidas as fracções a um denominador commum, temos $\frac{14a}{6}-\frac{9a}{6}$ ou $\frac{14a-9a}{6}=\frac{5a}{6}$.

Operação

$$\frac{7a}{3}-\frac{3a}{2}=?$$

$$\frac{14a-9a}{6}=\frac{5a}{6}$$

Regra. *Reduzem-se as fracções a um denominador commum, e subtrahe-se o numerador do subtrahendo do numerador do minuendo, e a differença escreve-se sobre o denominador commum.*

Exercicios para resolver:

1.	De $\frac{5y}{8}$ subtrahir $\frac{3y}{8}$.	Resp.	$\frac{2y}{8}=\frac{y}{4}.$
2.	De $\frac{a}{2}$ subtrahir $\frac{a}{3}$.	»	$\frac{a}{6}.$
3.	De $\frac{3x}{4}$ subtrahir $\frac{2x}{3}$.	»	$\frac{x}{12}.$
4.	De $\frac{a+b}{2}$ subtrahir $\frac{a-b}{2}$.	»	b
5.	De $\frac{2ax}{3}$ subtrahir $\frac{5ax}{3}$.	»	$-\frac{3ax}{3}=ax.$
6.	De $\frac{3}{4a}$ subtrahir $\frac{5}{2x}$.	»	$\frac{3x-10a}{4ax}.$
7.	De $\frac{3a}{4x}$ subtrahir $\frac{4x}{3a}$.	»	$\frac{9a^2-16x^2}{12ax}.$
8.	De $\frac{x+y}{x-y}$ subtrahir $\frac{x-y}{x+y}$.	»	$\frac{4xy}{x^2-y^2}.$
9.	De $\frac{2a+b}{5c}$ subtrahir $\frac{3a-b}{7c}$.	»	?
10.	De $5x+\frac{x}{b}$ subtrahir $2x-\frac{x-b}{c}$.	»	?
11.	De $\frac{1}{a-b}$ subtrahir $\frac{1}{a+b}$.	»	?
12.	De $\frac{a+3d}{4}$ subtrahir $\frac{3a-2d}{3}$.	»	?

Multiplicação de fracções

159. No theorema primeiro e no quarto sobre fracções, ficou demonstrado que multiplicando-se o numerador ou dividindo-se o denominador de uma fracção por um numero inteiro, o valor da fracção fica multiplicado por esse numero. Daqui se conclue que podemos de dois modos multiplicar uma fracção por um numero inteiro.

1.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por m.

Solução. Multiplicando-se o numerador a pela quantidade m; o producto é am que se escreve sobre o denominador b, e ficará $\frac{am}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{a \times m}{b} = \frac{am}{b}$$

2.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{bx}$ por x.

Solução. Divide-se o denominador bx por x, e a fracção ficará $\frac{a}{b}$. Este modo só é praticavel quando o denominador se divide exactamente pela quantidade inteira.

Operação

$$\frac{a}{bx} \times x = \frac{a}{bx \div x} = \frac{a}{b}$$

Regra. *Multiplica-se o numerador pela quantidade inteira, e o producto escreve-se sobre o denominador.* Ou
Divide-se o denominador pela quantidade inteira, quando é divisivel por ella.

Operar as seguintes multiplicações:

	Respostas
1. Multiplicar $\frac{2a}{bc}$ por ad.	$\frac{2a^2d}{bc}$.
2. Multiplicar $\frac{ab}{24}$ por 6.	$\frac{ab}{4}$.
3. Multiplicar $\frac{ab}{cd}$ por d.	$\frac{ab}{c}$.
4. Multiplicar $\frac{a+b}{c}$ por xy.	$\frac{axy+bxy}{c}$.
5. Multiplicar $\frac{b-c}{d}$ por $b+c$.	$\frac{b^2-c^2}{d}$.

	Respostas
6. Multiplicar $\frac{3x^2}{10y}$ por $5y$.	$\frac{3x^2}{2}$.
7. Multiplicar $\frac{4c}{2a+c}$ por $a-2b$.	$\frac{4ac-8bc}{2a+c}$.
8. Multiplicar $\frac{b+c}{b-c}$ por $a+c$.	$\frac{ab+ac+bc+c^2}{b-c}$.
9. Multiplicar $\frac{a-b}{c+d}$ por $c+d$.	$a-b$.
10. Multiplicar $\frac{a}{c}$ por c.	a.
11. Multiplicar $\frac{2a+3xz}{a^2b}$ por ab.	$\frac{2a+3xz}{a}$.
12. Multiplicar $\frac{2x+3}{5}$ por $2ax$.	$\frac{4ax^2+6ax}{5}$.

160. Multiplicar uma fracção por outra.

Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Solução. Multiplicando entre si os numeradores, temos $a \times c = ac$; multiplicando os denominadores, temos $b \times d = bd$. O producto das duas fracções é $\frac{ac}{bd}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Demonstração. Se multiplicarmos $\frac{a}{b}$, por c, o producto será $\frac{ac}{b}$; mas o multiplicador não é c, e sim $\frac{c}{d}$; por isso, o producto $\frac{ac}{b}$ é d vezes maior do que deve ser. Multiplicando agora o denominador de $\frac{ac}{b}$ por d, tornaremos d vezes menor o valor da fracção, e então dará $\frac{ac}{bd}$ o producto pedido.

Regra. *Multiplicam-se entre si os numeradores, depois os denominadores, e os dois productos serão os termos da fracção resultante da multiplicação.*

Nota. Para se multiplicar uma fracção por uma quantidade mixta, reduz-se a quantidade mixta a uma fracção, e segue-se a regra acima. Se a fracção resultante fôr reductivel, simplifica-se, para que o producto fique na sua expressão mais simples.

Operar as seguintes multiplicações:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{3a}{4}\times\frac{5x}{8}=?$	$\frac{15ax}{32}$.	7	$\frac{2x}{y}\times\frac{x}{2d}\times\frac{b}{y}=?$	$\frac{bx^2}{dy^2}$.
2.	$\frac{4a}{5x}\times\frac{3x}{7a}=?$	$\frac{12}{35}$.	8.	$\frac{a-b}{2}\times\frac{2}{a^2-b^2}=?$	
3.	$\frac{2a}{3}\times\frac{4a}{5}=?$	$\frac{8a^2}{15}$.	9.	$\frac{2x}{a}\times\frac{3ab}{c}\times\frac{3ac}{25}=?$	
4.	$\frac{3x^2}{10y}\times\frac{5y}{9x}=?$	$\frac{x}{6}$.	10.	$\left(x+\frac{2xy}{x-y}\right)\left(x-\frac{2xy}{x+y}\right)=?$	
5.	$\frac{3(a+x)}{2}\times\frac{4x}{a+x}=?$	$6x$.	11.	$\frac{-a}{a-b}\times\frac{b}{a+b}=?$	
6.	$\frac{2x+3}{5}\times\frac{10x}{7}=?$	$\frac{4x^2+6x}{7}$.	12.	$\left(b+\frac{bx}{a}\right)\frac{a}{x}=?$	

161. Quando os numeradores e denominadores teem factores communs, cancellam-se esses factores antes da multiplicação, e deste modo, obtem-se um producto já simplificado.

Problema. Qual é o producto de $\frac{b}{x}\times\frac{y}{b}\times\frac{x}{2a}$?

Solução. Como o factor b é commum ao numerador da primeira fracção e ao denominador da segunda, cancella-se este factor nos dois logares, e o mesmo se faz com o factor x. O resultado da multiplicação é $\frac{y}{2a}$.

Operação

$$\frac{\cancel{b}}{\cancel{x}}\times\frac{y}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{x}}{2a}=\frac{y}{2a}.$$

Demonstração. Dividindo-se ambos os termos de uma fracção por um mesma quantidade, não se altera o seu valor (n. **147**). Ora, a fracção é $\frac{b}{x}\times\frac{y}{b}\times\frac{x}{2a}$ ou $\frac{bxy}{2abx}$. Cancellar o factor b no numerador e no denominador é o mesmo que dividir estes dois termos por b; o mesmo succede com o factor x.

Problema. Multiplicar $\frac{9a}{15y}$ por $\frac{5b}{2a}$.

Solução. Decompondo-se os dois numeradores e os dois denominadores, e cancellando-se os factores communs 3, 5 e a, obtem-se logo o producto simplificado.

$$\frac{9a}{15y}\times\frac{5b}{2a}=\frac{\cancel{3}\times3\times\cancel{a}\times\cancel{5}\times b}{\cancel{3}\times\cancel{5}\times y\times2\times\cancel{a}}=\frac{3b}{2y}$$

1. Operar $\frac{2a}{3}\times\frac{4a}{5}\times\frac{5}{2a}\times\frac{6}{x}$. Resp. $\frac{8a}{x}$.
2. Operar $\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a-b}{a+b}$. » 1.
3. Operar $\frac{xyz}{x^2+y^2}\times\frac{x^2+y^2}{xyz}$. » ?
4. Operar $\frac{15x}{10y}\times\frac{3ab}{35x}\times\frac{2a}{c}$. » ?

Divisão de fracções

162. A divisão de uma fracção por um numero inteiro póde ser operada por duas fórmas: ou dividindo-se o numerador ou multiplicando-se o denominador, como já foi demonstrado nas secções **141** e **142**.

Vamos resolver quatro exemplos para o discipulo não achar difficuldade alguma nas operações.

Dividindo-se o numerador:

$$\frac{4}{5}\div 2=\frac{4\div 2}{5}=\frac{2}{5} \qquad \frac{ay}{m}\div y=\frac{ay\div y}{m}=\frac{a}{m}$$

$$\frac{3a}{b}\div 3=\frac{3a\div 3}{b}=\frac{a}{b} \qquad \frac{18ac}{by}\div 3a=\frac{18ac\div 3a}{by}=\frac{6c}{by}.$$

Os mesmos exemplos, multiplicando-se o denominador:

$$\frac{4}{5}\div 2=\frac{4}{5\times 2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5} \qquad \frac{ay}{m}\div y=\frac{ay}{m\times y}=\frac{ay}{my}=\frac{a}{m}.$$

$$\frac{3a}{b}\div 3=\frac{3a}{b\times 3}=\frac{3a}{3b}=\frac{a}{b} \qquad \frac{18ac}{by}\div 3a=\frac{18ac}{by\times 3a}=\frac{18ac}{3aby}=\frac{6c}{by}.$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo divisor, e se não fôr divisivel, multiplica-se o denominador pelo divisor, e escreve-se o numerador sobre o resultado.*

1. Dividir $\frac{6a^2b}{7n}$ por $3ab$. Resp. $\frac{2a}{7n}$.
2. Dividir $\frac{15a^3c^2}{17bd}$ por $3a^2c$. » $\frac{5ac}{17bd}$.
3. Dividir $\frac{14ac^3m^2}{11xy}$ por $7acm^2$. » $\frac{2c^2}{11xy}$.
4. Dividir $\frac{35bd^2}{13ac^4}$ por $5b^3d$. » $\frac{7d}{13ac^4}$.

5. Dividir $\frac{a^2+ab}{3+2x}$ por a. Resp. $\frac{a+b}{3+2x}$.

6. Dividir $\frac{c^2+cd}{5}$ por $c+d$. » $\frac{c}{5}$.

7. Dividir $\frac{x^2+2xy+y^2}{c+d}$ por $x+y$. » $\frac{x+y}{c+d}$.

8. Dividir $\frac{2a}{3c}$ por b. » $\frac{2a}{3bc}$.

9. Dividir $\frac{3}{ab+cd}$ por bd. » $\frac{3}{ab^2d+bcd^2}$.

10. Dividir $\frac{3+5a}{a-b}$ por $a+b$. » $\frac{3+5a}{a^2-b^2}$.

11. Dividir $\frac{2a+5c}{2x+3y}$ por $2x-3y$. » $\frac{2a+5c}{4x^2-9y^2}$.

12. Dividir $\frac{b-c}{a^2+ab+b^2}$ por $a-b$. » $\frac{b-c}{a^3-b^3}$.

163. Na divisão de uma fracção por outra, ha dois casos a considerar, que são:

1.º Quando as fracções teem um denominador commum.
2.º Quando as fracções teem denominadores differentes.

1.º Caso. Dividir $\frac{12a}{m}$ por $\frac{3a}{m}$.

Solução. Como as duas fracções teem um denominador commum, bastará só operar com os numeradores. Então $12a \div 3a = 4$, isto é, $12a$ contém 4 vezes $3a$, e por isso, $\frac{12a}{m}$ contém 4 vezes $\frac{3a}{m}$.

Operação

$$\frac{12a}{m} \div \frac{3a}{m} = 4$$

2.º Caso. Dividir $\frac{a}{x}$ por $\frac{c}{y}$.

Solução. Desde que os denominadores são differentes, devemos reduzil-os a um denominador commum, e teremos $\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{xy}$. Agora, como as duas fracções teem um denominador commum, podemos fazer a operação só com os numeradores, como no caso acima, $ay \div cx = \frac{ay}{cx}$.

Operação

$$\frac{a}{x} \div \frac{c}{y} = ?$$

$$\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{xy} = \frac{ay}{cx}.$$

Examinando o quociente $\frac{ay}{cx}$, vemos que elle é composto de $\frac{a}{x} \times \frac{y}{c}$, isto é, o dividendo multiplicado pelo divisor, tendo este os termos invertidos. Daqui podemos formular uma só regra para os dois casos:

Regra. *Para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas fracções.*

Nota. Se o dividendo ou o divisor fôr uma quantidade mixta, transforma-se em uma fracção **(n. 150)**, e procede-se como na regra acima.

Se o dividendo fôr uma quantidade inteira, além da regra já exposta podemos tambem dar ao inteiro o denominador 1 como, $a = \frac{a}{1}$ e depois proceder como acima.

1. Dividir $\frac{a}{3}$ por $\frac{2a}{9}$. Resp. $1\frac{1}{2}$.

2. Dividir $\frac{3a}{5}$ por $\frac{4a}{7}$. » $\frac{21}{20}$.

3. Dividir $\frac{a^2b}{cd}$ por $\frac{ab}{d}$. » $\frac{a}{c}$.

4. Dividir $\frac{x^2}{3a}$ por $\frac{xy^2}{25}$. » $\frac{25x}{3ay^2}$.

5. Dividir 4 por $\frac{a}{3}$. » $\frac{12}{a}$.

6. Dividir 4 por $\frac{3}{a}$. » $\frac{4a}{3}$.

7. Dividir ab^2 por $\frac{2ab}{5c}$. » $\frac{5c}{2}$.

8. Dividir $\frac{6ax}{3}$ por $\frac{4x}{3}$. » $\frac{3a}{2}$.

9. Dividir $\frac{3a^2x}{7}$ por $\frac{3ax^2}{14}$. » $\frac{2a}{x}$.

10. Dividir $\frac{16ax}{5}$ por $\frac{4x}{15}$. » $12a$.

11. Dividir $\frac{6x+4}{5}$ por $\frac{3x+2}{4y}$. » $\frac{8y}{5}$.

12. Dividir $\frac{x^2-4}{6}$ por $\frac{x-2}{2}$. » $\frac{x+2}{3}$.

13. Dividir $\frac{x^2-2xy+y^2}{ab}$ por $\frac{x-y}{bc}$. » $\frac{cx-cy}{a}$.

14. Dividir $\frac{a^2-b^2}{4}$ por $\frac{a+b}{8}$. » ?

15. Dividir $5a^2 - \frac{1}{5}$ por $a + \frac{1}{5}$. » ?

16. Dividir $\frac{7a^2-5a}{3}$ por $\frac{a^2}{3}$. » ?

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

164. Toda igualdade é composta de duas partes unidas pelo signal =; a parte que está á esquerda deste signal, chama-se **primeiro membro;** e a que está a direita, chama-se **segundo membro.** Exemplo:

$$\underset{(1.^o\ \text{Membro})}{5x+3x-y} = \underset{(2.^o\ \text{Membro})}{a+12}$$

Cada membro de uma igualdade póde ter um ou mais termos precedidos pelos signaes + ou —; assim, na igualdade acima, o primeiro membro tem tres termos, e o segundo tem dois.

Dentre as igualdades precisamos, em Algebra, distinguir: as *identidades* e as *equações*. A igualdade é uma identidade si ella persiste quaesquer que sejam os valores attribuidos ás suas lettras. Por exemplo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ é uma identidade, pois a igualdade subsiste para qualquer valor que se dê a a e b. Já $x-5=3$ é uma equação, pois a igualdade só fica satisfeita dando-se a x o valor 8. A equação existe, portanto, quando a igualdade só se satisfaz dando-se ás lettras determinados valores. Costuma-se, para indicar a identidade, separar os seus dois membros, pelo signal ≡.

165. Em uma equação ha geralmente quantidades conhecidas e quantidades desconhecidas. As quantidades conhecidas são representadas por numeros ou pelas primeiras lettras do alphabeto, a, b, c, etc.; e as quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas lettras x, y e z.

166. As equações distinguem-se pelos seus diversos graus.

Equação do 1.° grau é a que contém uma só quantidade desconhecida na sua primeira potencia, isto é, com o expoente 1 subentendido, pois x ou x^1 exprime a primeira potencia da quantidade x. Assim, $2x+5=9$ é uma equação do primeiro grau.

Equação do 2.° grau é a que contém uma quantidade desconhecida na segunda potencia, isto é, com expoente 2. Assim $4x^2-7=29$ é uma equação do 2.° grau.

167. Quando uma equação contém mais de uma quantidade desconhecida, o seu grau é igual á maior somma dos expoentes das quantidades desconhecidas em qualquer termo.

168. Conhece-se o grau de uma equação pelo maior expoente da incognita, quando ha uma só, ou pela maior somma dos expoentes das incognitas em qualquer termo, quando ha mais de uma.

Agora trataremos sómente das equações do 1.° grau, depois exporemos as outras circumstanciadamente.

169. Ha seis proposições que precisamos conhecer para mais facilmente comprehendermos as transformações que, muitas vezes, é necessario operar em uma equação.

Estas proposições, por serem evidentes e não precisarem de demonstração, chamam-se tambem **axiomas:**

1.° *Se a duas quantidades iguaes, a mesma quantidade fôr addicionada, as duas sommas serão iguaes.*

2.° *Se de duas quantidades iguaes, a mesma quantidade fôr subtrahida, os dois restos serão iguaes.*

3.° *Se duas quantidades iguaes forem multiplicadas pelo mesmo factor, os dois productos serão iguaes.*

4.° *Se duas quantidades iguaes divididas pelo mesmo divisor, os dois quocientes serão iguaes.*

5.° *Se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma potencia, os dois resultados serão iguaes.*

6.° *Se a mesma raiz fôr extrahida de duas quantidades iguaes, os dois resultados serão iguaes.*

170. Estas seis proposições ou axiomas podem ser reduzidas a uma só, a saber: *Se fizermos a mesma operação em duas quantidades iguaes, os resultados serão iguaes.* Daqui podemos deprehender que, se um membro de uma equação passar por alguma modificação, e o outro membro passar por uma modificação identica, os dois membros continuarão em igualdade.

171. Verificar uma equação é reconhecer a igualdade entre seus membros.

Se quizermos verificar uma equação, substituiremos as quantidades desconhecidas pelos seus valores numericos, e, se o resultado nos dois membros fôr igual, a equação estará verificada. Assim, na equação $2x+2a=3x+3$, substituindo a lettra x por 5, e a lettra a por 4, teremos

$$(2\times5)+(2\times4)=(3\times5)+3$$
$$10 + 8 = 15 + 3$$
$$18 = 18$$

Esta verificação póde ser effectuada, depois de termos achado o valor das quantidades desconhecidas.

Transformação das equações

172. Transformar uma equação é mudar a sua fórma sem alterar a igualdade entre os seus membros.

173. Resolver uma equação é achar o valor da quantidade desconhecida; este valor chama-se tambem **raiz da equação.**

174. As transformações que constantemente precisamos effectuar para resolver uma equação, são as seguintes:

1.ª Inteirar a equação, isto é, transformar todos os termos fraccionarios da equação em quantidades inteiras.

2.ª Transpôr os termos de um membro para o outro.

3.ª Reduzir os termos semelhantes.

Inteirar uma equação

175. Quando um ou mais termos de uma equação são fracções, torna-se preciso transformal-os em numeros inteiros para que a equação fique inteirada, isto é, composta só de numeros inteiros.

Problema. Inteirar a seguinte equação: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$.

Solução. O minimo multiplo commum dos denominadores 2 e 3 é 6, porque $2\times3=6$. Multiplicando por 6 todos os termos da equação, temos $\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$.

Com esta multiplicação não transtornamos a igualdade da equação, porque, se o primeiro membro ficou 6 vezes maior, o segundo teve igual augmento, e por isso continuam ambos em igualdade. (Axioma 3.º).

Agora as fracções $\frac{6x}{2}$ e $\frac{6x}{3}$ podem ser transformadas em quantidades inteiras dividindo os numeradores pelos seus respectivos denominadores **(n. 149)**, e ficarão $3x$ e $2x$, e a equação inteirada será $3x+2x=30$.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$$

$$\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$$

$$3x+2x=30$$

Problema. Inteirar a equação $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d$.

Solução. O minimo multiplo commum dos denominadores ab e bc é abc **(n. 131)**; multiplicando por abc todos os termos da equação, temos $\frac{abcx}{ab}+\frac{abcx}{bc}=abcd$.

Transformando agora as duas fracções em quantidades inteiras, temos cx e ax, e a equação inteirada será $cx+ax=abcd$.

Operação

$$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d$$

$$\frac{abcx}{ab}+\frac{abcx}{bc}=abcd$$

$$cx+ax=abcd$$

Regra. *Para se inteirar uma equação, acha-se o minimo multiplo commum de todos os denominadores; multiplica-se por elle cada termo da equação, simplificando-se os productos.*

Inteirar as seguintes equações:

		Respostas
1.	$\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=2$.	$4x-3x=24$.
2.	$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=1$.	$20x+15x+12x=60$.
3.	$\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{6}=\frac{5}{12}$.	$6x+3x-4x=10$.
4.	$\frac{x}{3}-\frac{x}{5}+\frac{x}{10}=\frac{7}{10}$.	$10x-6x+3x=21$.
5.	$\frac{x}{2}-4=\frac{x}{3}+6$.	$3x-24=2x+36$.
6.	$\frac{5x}{8}-\frac{5}{6}=\frac{3}{4}+\frac{7x}{12}$.	$15x-20=18+14x$.
7.	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+f=g$.	$ad-bc+bdf=bdg$.
8.	$\frac{2x+8}{2}-4=\frac{x-4}{12}+57$.	?
9.	$\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{7}=\frac{x-3}{2}+\frac{5}{14}$.	?
10.	$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=\frac{c}{a^2-b^2}$.	$ax-bx+ax+bx=c$.

Transpôr os termos de uma equação

176. Quando ambos os membros de uma equação conteem quantidades conhecidas e desconhecidas, transpõem-se as quantidades desconhecidas para o primeiro membro, e as conhecidas para o segundo.

Problema. Transpôr os termos da equação $6x-5=7+3x$.

Solução. Nesta equação temos de transpôr $3x$ para o primeiro membro, e 5 para o segundo.

Tirando $3x$ do segundo membro, elle ficará com menos $3x$; mas para conservar a igualdade, passa-se $3x$ com o signal — para o primeiro membro, e assim os dois membros ficarão com menos $3x$, e conservarão a igualdade.

Operação

$$6x-5=7+3x$$

$$6x-3x=7+5$$

Tirando — 5 do primeiro membro, elle augmentará 5 unidades, porque — 5 quer dizer menos 5; ora, para conservarmos a igualdade, passaremos 5 para o outro membro com o signal +, e assim os dois membros terão 5 unidades de mais, o que não alterará a igualdade. E a equação transposta será $6x-3x=7+5$.

Regra. *Em uma equação podemos transpôr qualquer termo de um membro para o outro, mudando-lhe o signal.*

Nas seguintes equações, o discipulo transporá os termos conhecidos para o primeiro membro, e os desconhecidos, para o segundo:

1. $3x+6-8=2x+3$. Resp. $3x-2x=3+8-6$.
2. $ax+b=d-cx$. » $ax+cx=d-b$.
3. $4x-6=2x+4$. » $4x-2x=4+6$.
4. $9x+c=cx+d$. » $9x-cx=d-c$.
5. $ax+d=dx+b$. » $ax-dx=b-d$.

Reducção de termos semelhantes

177. Depois de transpormos os termos de uma equação, precisamos reduzir em cada membro todos os termos semelhantes para acharmos o valor da incognita.

1.º Problema. Qual o valor de x na equação $3x+2x=$ $=15+10$?

Solução. Os dois termos do primeiro membro podem ser reduzidos a um só, porque $3x+$ $+2x=5x$.

Tambem os dois termos do segundo membro podem ser reduzidos a um só, pois $15+10=25$. A equação reduzida é $5x=25$, e o valor de x é $25\div5=5$.

Operação

$$3x+2x=15+10$$
$$5x=25$$
$$x=5$$

2.º Problema. Achar o valor de x na equação $3x+x=$ $=18+3$?

Solução. Reduzindo ambos os membros, temos $4x=21$; ora, o valor de x é 21 dividido por 4, isto é, $\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

Operação

$$3x+x=18+3$$
$$4x=21$$
$$x=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

178. Para resolvermos uma equação litteral, temos de fazer ás vezes alguma combinação com a multiplicação ou com a divisão. Assim, na equação $ax=b$, se dividirmos ambos os termos por a, teremos $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$; reduzindo agora $\frac{ax}{a}$ a uma quantidade inteira, temos a equação $x=\frac{b}{a}$.

3.º Problema. Qual o valor de x na equação $ax-bx+$ $+cx=d$?

Solução. O primeiro membro sendo decomposto para se tirar o factor x, ficará $x(a-b+c)$, (Vêde **n. 115**. Dividindo agora ambos os termos por $a-b+c$, e depois reduzindo o primeiro membro a uma quantidade inteira, teremos $x=\frac{d}{a-b+c}$.

Operação

$$ax-bx+cx=d$$
$$x(a-b+c)=d$$
$$\frac{x(a-b+c)}{a-b+c}=\frac{d}{a-b+c}$$
$$x=\frac{d}{a-b+c}$$

Nota. Na pratica não precisamos estar indicando a divisão de ambos os membros pelo coefficiente da incognita. Com effeito: sabemos que para dividir um producto por um de seus factores, basta supprimir esse factor. De sorte que, para dividir $x(a-b+c)$ por $a-b+c$ é sufficiente supprimir $a-b+c$. Faz-se então $x\ (a-b+c)=d$ donde $x=\frac{d}{a-b+c}$.

179. Para formularmos a regra completa para a solução das equações, vamos resolver o seguinte problema:

4.º Problema. Qual é o valor de x na equação $\frac{3x}{2}-4=$ $=6+\frac{x}{4}$?

Solução. Equação dada é.............. $\frac{3x}{2}-4=6+\frac{x}{4}$
inteirando a equação.................. $6x-16=24+x$,
transpondo os termos.................. $6x-x=24+16$,
reduzindo os termos................... $5x=40$,
dividindo ambos os membros por 5.... $x=8$.

Regra geral para a solução

I. *Inteiram-se todos os termos fraccionarios da equação.*
II. *Transpõem-se todas as quantidades conhecidas para um dos membros, e as desconhecidas para o outro.*
III. *Reduz-se cada membro da equação á sua fórma mais simples, e depois dividem-se ambos os membros pelo coefficiente da quantidade desconhecida.*

Resolver as seguintes equações:

1. $3x-5=2x+7$. Resp. $x=12$.
2. $3x-8=16-5x$. » $x=3$.
3. $5x-7=3x+15$. » $x=11$.
4. $3x-25=-x-9$. » $x=4$.
5. $15-2x=6x-25$. » $x=5$.
6. $5(x+1)+6(x+2)=9(x+3)$. » $x=5$.
7. $4(5x-3)-64(3-x)-3(12x-4)=96$. » $x=6$.
8. $10(x+5)+8(x+4)=5(x+13)+121$. » $x=8$.
9. $\frac{x}{2}-2=5-\frac{x}{5}$. » $x=10$.
10. $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+7=\frac{x}{8}-\frac{x}{6}+\frac{21}{2}$. » $x=12$
11. $x+\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}=18$. » $x=8$.
12. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=14$. » $x=24$.

13. $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=2\frac{1}{2}$. Resp. $x=2$.

14. $\frac{x-2}{4}-2=1-\frac{x+7}{3}$. » $x=2$.

15. $\frac{3x+1}{2}-\frac{2x}{3}=10+\frac{x-1}{6}$. » $x=14$.

16. $\frac{x+2}{3}-\frac{x-3}{4}=x-2-\frac{x-1}{2}$. » $x=7$.

17. $\frac{2x-2}{4}-\frac{4-x}{2}=2x-\frac{7x-2}{3}$. » $x=2$.

18. $\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}x+18=\frac{1}{9}(4x+1)$. » $x=20$.

19. $\frac{5x}{x+4}=1$. » $x=1$.

20. $2x-\frac{x-2}{10}=x+\frac{x+18}{15}$. » $x=1\frac{1}{5}$.

21. $4x-b=2x-d$. » $x=\frac{b-d}{2}$.

22. $ax+b=cx+d$. » $x=\frac{d-b}{a-c}$.

23 $ax-bx=d-cx$. » $x=\frac{d}{a+c-b}$.

24. $ax-bx=c+dx-m$. » $x=\frac{c-m}{a-b-d}$.

25. $7+9a-5x=6x+5ax$. » $x=\frac{9a+7}{5a+11}$.

26. $b(a-bx)+c(ax-c)=bc$. » $x=\frac{bc-ab+c^2}{ac-b^2}$.

27. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. » $x=\frac{abc}{a+b}$.

28. $\frac{ab}{x}=bc+\frac{1}{x}$. » $x=\frac{ab-1}{bc}$.

29. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=1$. » $x=a+b+c$.

30. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$. » $x=\frac{abcd}{ab+ac+bc}$.

31. $\frac{a}{x}+\frac{b}{c}-\frac{d}{m}=0$. » $x=\frac{acm}{cd-bm}$.

32. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$. » $x=\frac{a^2}{a-b}$.

33. $\frac{ax}{2}+\frac{bx}{3}=c$. » $x=?$

34. $\frac{3x}{2}+\frac{2a}{3}=\frac{4b}{5}+\frac{15}{8}$. » $x=?$

35. $x+2=3x+\frac{x-8}{4}-\frac{x+6}{3}$. » $x=?$

36. $x-20=-\frac{2x+1}{5}$. Resp. $x=?$

37. $\frac{3a+x}{x}-5=\frac{6}{x}$. » $x=?$

38. $2x+\frac{ax-5}{3}=x-a$. » $x=?$

39. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=m$. » $x=?$

PROBLEMAS

180. Problema algebrico é uma questão para resolver, na qual se dá uma ou mais quantidades conhecidas chamadas **dados**, e se requer uma ou mais quantidades desconhecidas chamadas **incognitas**.

181. Resolver um problema é determinar as quantidades desconhecidas, por meio de operações feitas com as quantidades conhecidas.

182. A solução algebrica de um problema consta de duas partes que são:

A *primeira* é a formação da equação que consiste em exprimir em linguagem algebrica a relação que ha entre quantidades desconhecidas e os dados do problema.

A *segunda* é a solução da equação, isto é, achar o valor da incognita.

183. A primeira parte é geralmente a mais difficil. Não é possivel formular uma regra precisa e clara que habilite o discipulo a traduzir promptamente o enunciado de um problema, em uma equação algebrica; o proprio discipulo com o seu raciocinio é quem tem de formar a equação, segundo a natureza dos dados offerecidos para o calculo.

Nota. Ha problemas de facil intuição, e que podem ser resolvidos sem difficuldade alguma; ha outros, porém, que só a custa de um esforço do raciocinio é que os discipulos poderão achar um meio de os dispôr em uma equação algebrica. Isto, porém, de modo algum deve desanimar os alumnos estudiosos, porque com alguma applicação e perseverança, elles poderão vencer as maiores difficuldades.

Se na primeira tentativa o discipulo não puder formar a equação do problema, empregue novo esforço; repita as tentativas até ficar senhor do achado. Todo o esforço e fadiga que dér ao raciocinio para resolver um problema, não será trabalho inutil ou perdido, porque lhe resultará em dois grandes proveitos: o primeiro é adestrar-se em resolver facilmente os problemas da Algebra, o que é já uma bôa recompensa; o

segundo é desenvolver as faculdades intellectuaes, pois sendo ellas manejadas constantemente no raciocinio exacto e claro das soluções algebricas, poderão tambem raciocinar e resolver com acerto questões de outra natureza.

A segunda parte da solução dos problemas, isto é, a determinação dos seus elementos desconhecidos, já ficou perfeitamente explicada, de modo a poderem os discipulos resolver com promptidão qualquer caso.

184. A primeira cousa que o discipulo tem de fazer para resolver um problema, é comprehender perfeitamente o enunciado, isto é, conhecer a natureza e todas as condições da questão para poder exprimil-as em linguagem algebrica numa equação. A direcção geral para este processo é a seguinte:

Regra. *Representam-se as incognitas com as ultimas lettras do alphabeto.*

Exprime-se em linguagem algebrica as relações que ha entre as quantidades conhecidas e as incognitas, de sorte que a equação formada satisfaça as condições do problema.

Resolve-se depois a equação.

185. Vamos agora resolver alguns problemas para mostrar aos discipulos o modo por que devem dirigir o seu raciocinio nestes processos algebricos.

I Problema. A somma de dois numeros é 186, e o maior é o dobro do menor; quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero menor, o maior será $2x$. Como os dois numeros sommam 186, a equação será $x+2x=186$. Resolvida a equação, vemos que x, numero menor, é 62, e $2x$ que é o numero maior, é 124.

Verificação. O resultado da solução é verdadeiro, quando satisfaz todas as condições do problema. Ora neste problema ha duas condições: a primeira é que os dois numeros sommam 186; e a segunda é que o maior é o dobro do menor. Os numeros 62 e 124 satisfazem estas condições, porque $62+124=186$, e 124 é o dobro de 62.

Equação

$$x+2x=186$$
$$3x=186$$
$$x=62$$
$$2x=124$$

II Problema. Um pai disse a seu filho: «A differença das nossas idades é 48 annos, e eu tenho cinco vezes a tua idade». Quaes eram as duas idades?

Solução. Seja x a idade do filho; então a idade do pai será $5x$. Como a differença das duas idades é 48 annos, a equação será $5x-x=48$. Resolvida a equação, x é igual a 12; logo, a idade do filho é 12 annos, e a do pai é 5 vezes maior, isto é, $5\times12=60$ annos.

Verificação. $60-12=48$.

Equação

$$5x-x=48$$
$$4x=48$$
$$x=12$$
$$5x=60.$$

III Problema. Qual é o numero que, juntando-se-lhe um terço de si mesmo, ficará 24?

Solução. Seja x o numero; então um terço de x é $\frac{x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=24$.

Inteirada a equação, temos $3x+x=72$. Resolvida a equação, x é igual a 18; logo, o numero é 18.

Verificação. $18+\frac{18}{3}=24$.

Equação

$$x+\frac{x}{3}=24$$
$$3x+x=72$$
$$4x=72$$
$$x=18.$$

IV Problema. Qual é o numero que, juntando-se-lhe metade de si mesmo, e do resultado subtrahindo-se dois terços do mesmo numero, restará 105?

Solução. Seja x o numero; então a metade desse numero é $\frac{x}{2}$, e dois terços são $\frac{2x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$.

Resolvida a equação, o valor de x é 126.

Verificação. $126+63-84=105$.

Equação

$$x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$$
$$6x+3x-4x=630$$
$$5x=630$$
$$x=126.$$

V Problema. Dividir uma linha de 25 centimetros de comprimento em duas partes, de sorte que a maior tenha 3 centimetros mais do que a menor.

Solução. Seja x a parte menor, e $x+3$ a maior; então a equação será $x+x+3=25$. O valor de x é 11 que é a parte menor; a maior é $x+3=14$.

Verificação. $11+14=25$.

Equação

$$x+x+3=25$$
$$2x=25-3$$
$$2x=22$$
$$x=11$$
$$x+3=14.$$

VI Problema. Dividir 68$ entre A, B e C, de sorte que B receba 5$ mais do que A, e C receba 7$000 mais do que B.

Solução. Seja x a parte de A; então a parte de B será $x+5\$$, e a parte de C será $x+5\$+7\$$, isto é, $x+12\$$.

A equação será $x+x+5\$+x+12\$=68\$$. O valor de x é 17$; então a parte de A é 17$; a parte de B é 22$, e a parte de C é 29$.

Verificação. $17\$+22\$+29\$=68\$$.

Equação

$$x+x+5\$+x+12\$=68\$$$
$$3x=51\$$$
$$x=17\$$$
$$x+5\$=22\$$$
$$x+12\$=29\$$$

VII Problema. Qual é o numero que sendo addicionado com a sua terça parte, a somma será igual á sua metade e mais 10?

Solução. Seja x o numero pedido; então o numero com a sua terça parte é $x+\frac{x}{3}$; e a metade do numero com mais 10 é $\frac{x}{2}+10$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$.

Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 12.

Verificação. $12+4=6+10$.

Equação

$$x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$$
$$6x+2x=3x+60$$
$$6x+2x-3x=60$$
$$5x=60$$
$$x=12.$$

VIII Problema. Um tanque tinha agua até a terça parte da sua altura; lançando-se dentro delle 17 barris de agua, ficou cheia a metade do tanque; quantos barris levava o tanque?

Solução. Seja x igual ao numero de barris que leva o tanque. Visto que um terço do numero mais 17 é igual á metade do numero, então a equação será $\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$.

O valor de x é 102, que é o numero de barris que leva o tanque.

Como os dois termos teem o signal menos, trocam-se os signaes nos dois termos, e assim ficarão com o signal mais.

Verificação. $\frac{102}{3}+17=\frac{102}{2}$.

Equação

$$\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$$
$$2x+102=3x$$
$$2x-3x=-102$$
$$-x=-102$$
$$x=102.$$

IX Problema. A somma de dois numeros é 67, e a sua differença é 19; quaes são os dois numeros?

Solução. Seja x o numero menor: $x+19$ será o maior.

A equação será $x+x+19=67$.

O valor de x é 24; logo, o numero menor é 24, e o maior é $x+19=43$.

Verificação. $24+43=67$.

Equação

$$x+x+19=67$$
$$2x=67-19$$
$$2x=48$$
$$x=24$$
$$x+19=43.$$

Outra solução. Seja x o numero maior; $x-19$ será o menor

Então, a equação será $x+x-19=67$.

O numero maior que é x, é 43; e o numero menor que é $x-19$, é 24.

$$x+x-19=67$$
$$2x=67+19$$
$$2x=86$$
$$x=43$$
$$x-19=24.$$

X Problema. Um fazendeiro contractou um empregado por 30 dias, dando-lhe 25 tostões e comida em cada dia que trabalhasse, e cobrando-lhe 20 tostões pela comida em cada dia que vadiasse. No fim do tempo, o empregado recebeu 300 tostões; quantos dias trabalhou elle, e quantos dias vadiou?

Solução. Seja x=ao numero de dias que trabalhou.

$30-x$=ao numero de dias que vadiou.

$25x$=salario dos dias de trabalho.

$20(30-x)$=importe da comida nos dias que não trabalhou.

Deduzindo do salario que ganhou, o importe da comida dos dias que vadiou, restam 300 tostões; então a equação será

$25x-20(30-x)=300$.

Sendo x igual a 20, os dias que trabalhou foram 20, e os que vadiou foram $30-20=10$.

Equação

$$25x-20(30-x)=300$$
$$25x-600+20x=300$$
$$45x=300+600$$
$$45x=900$$
$$x=20$$
$$30-x=10.$$

Verificação. 20 dias a 25 tostões .... 500 tostões
Deduzindo 10 " a 20 " .... 200 "
Restam. 300 "

Nota. Damos o dinheiro em tostões, para facilitar a solução; o discipulo agora poderá substituir 25 tostões por 2$500, e 20 tostões por 2$000, etc.

XI Problema. Duas locomotivas partiram ao mesmo tempo dos extremos de uma linha ferrea de 210 kilometros de extensão; uma movia-se com a velocidade de 40 kilometros por hora, e a outra com a velocidade de 30. Quantas horas gastaram para se encontrar?

Solução. Seja x o numero das horas: ora como uma locomotiva anda 40 kilometros por hora, em x horas andou $40x$. A outra locomotiva, por semelhante razão, andou $30x$. Como a linha tem 210 kilometros, a equação é $40x+30x=210$. Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 3, numero de horas precisas para o encontro.

Equação

$$40x+30x=210$$
$$70x=210$$
$$x=3.$$

Se o problema, além de pedir o numero de horas, pedisse tambem o ponto do encontro, a solução seria muito facil, porque sabendo-se que as locomotivas gastaram 3 horas para se encontrar, conclue-se daqui que

a mais veloz andaria $40\times3=120$ kilometros;
a outra andaria $30\times3=90$ kilometros.

Isto quer dizer que as locomotivas se deviam ter encontrado no ponto da linha, que dista 120 kilometros de um extremo, e 90 do outro.

XII Problema. De uma estação sahiu um trem mixto correndo 20 milhas por hora; 3 horas depois, sahiu o trem expresso na mesma direcção, andando 25 milhas por hora. Em quantas horas este alcançou aquelle?

Solução. Quando o segundo trem partiu, já o primeiro lhe levava uma dianteira de $20\times3=60$ milhas. Seja pois x o numero de horas: como o expresso anda 25 milhas por hora, em x horas andará $25x$; e por semelhante razão, o mixto andará $20x$. Ora, o expresso para alcançar o mixto, tem de andar o que o mixto anda, e ainda mais as 60 milhas que o separam delle. Logo, a equação deve ser $25x=20x+60$. Resolvida a equação, vemos que o numero de horas requerido é 12.

Equação

$$25x=20x+60$$
$$25x-20x=60$$
$$5x=60$$
$$x=12$$

Verificação. O expresso andou $25\times12=300$ milhas;
o mixto andou $20\times15=300$ milhas.

Outra solução do mesmo problema. Seja x o numero de horas que andou o expresso; e $x+3$ o numero de horas que andou o mixto. Ora como ambos correm uma distancia igual, segue-se que o numero de horas multiplicado pela distancia que cada um anda em cada hora, dará productos iguaes, e por isso

$$25\times x=20\times(x+3).$$

Equação

$$25\times x=20(x+3)$$
$$25x=20x+60$$
$$5x=60$$
$$x=12.$$

O discipulo poderá agora resolver sem difficuldade os seguintes problemas:

13. Dividir 42 amendoas entre Julio e José, de sorte que José receba o dobro das de Julio. Resp. Julio 14, José 28.

14. Dividir o numero 48 em tres partes, de sorte que a segunda parte seja o dobro da primeira, e a terceira tres vezes tanto como a primeira. Resp. 8, 16, e 24.

15. Dividir o numero 60 em tres partes, de sorte que a segunda parte tenha tres vezes a primeira, e a terceira seja o dobro da segunda. Resp. 6, 18 e 36.

16. Um meio, um terço e um quarto de certo numero sommam 65. Qual é o numero ? Resp. ?

17. Dividir 88 libras esterlinas entre A, B e C, dando a B $\frac{2}{3}$, e a C $\frac{3}{7}$ da parte de A. Resp. A=42, B=28 e C=18.

18. Dividir o numero 32 em duas partes, de sorte que a maior tenha mais 6 do que a menor. Resp. 13 e 19.

19. O numero inteiro de empregados de uma fabrica é 1000 pessoas; o numero de meninos é o dobro do numero de homens, e o numero de mulheres é 11 vezes o numero de meninos. Achar o numero de homens, de meninos e de mulheres.
Resp. Homens 40, meninos 80, mulheres, 880.

20. Um negociante comprou quantidades iguaes de farinha de duas sortes, uma a 8$ cada sacca, e a outra a 10$; importando a farinha em 198$, quantas saccas comprou? Resp. 22.

21. Do triplo de certo numero subtrahindo 17, resta 22; achar o numero. Resp. ?

22. Duas pessôas estando separadas pela distancia de 4200 kilometros, tomaram ás mesmas horas os trens expressos para onde se tinham de encontrar, andando uma 40 kilometros por hora, e a outra 30. Quantas horas gastaram para se encontrar? Resp. 60.

23. Dividir uma linha de 28 centimetros em duas partes, de sorte que uma tenha $\frac{3}{4}$ da outra. Resp. 12 e 16.

24. A somma de dois numeros é 200, e a sua differença é 50; quaes são os numeros? Resp. 125 e 75.

25. A somma de dois numeros é 100, e a sua differença é 76; quaes são os numeros? Resp. ?

26. A somma de dois numeros é $5\frac{1}{2}$ e a sua differença $\frac{3}{4}$; quaes são os numeros? Resp. $3\frac{1}{8}$ e $2\frac{3}{8}$.

27. Albano disse a sua irmã: «Eu tenho o dobro da tua idade, e, se eu tivesse mais 15 annos, teria tres vezes os teus annos.» Qual era idade de cada um? Resp. ?

28. A somma das idades de A, B e C é 109 annos; B é 3 annos mais moço do que A, e 5 annos mais velho do que C. Quaes são as suas idades? Resp. ?

29. Qual é o numero que se $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de si mesmo lhe forem juntos e ainda mais 26, a somma será igual a 5 vezes o mesmo numero? Resp. ?

30. Um menino disse: «Se a metade e um terço do meu dinheiro e mais 9$ fossem juntos ao que eu tenho, eu teria 20$.» Quanto tinha elle? Resp. ?

31. Um pai de familia morreu deixando 6:500$ para serem divididos por sua viuva, 2 filhos e 3 filhas, de sorte que cada filho recebesse o dobro da parte de cada filha, e a viuva recebesse 500$ menos do que o total que recebessem todos os filhos. Pergunta-se qual é a parte da viuva, a parte de cada filho, e a de cada filha.
Resp. Viuva 3:000$, cada filho 1:000$, e cada filha 500$.

32. Em uma eleição o numero de votos que tiveram dois candidatos foi 256; ora, tendo o candidato eleito uma maioria de 50 votos, quantos teve cada um? Resp. 153 e 103.

33. Qual é o numero que, se fôr multiplicado por 7, e ao producto se addicionar 3, e depois dividir tudo por 2, e deste quociente subtrahir 4, restará 15. Resp. 5.

34. Um negociante foi á Capital comprar alguns generos. No primeiro dia gastou $\frac{1}{5}$ do seu dinheiro; no segundo dia $\frac{1}{4}$, no terceiro dia $\frac{1}{3}$; no quarto dia $\frac{1}{6}$, e então restavam-lhe só 300$000. Quanto tinha elle quando chegou? Resp. 6:000$.

35. Um pintor foi contratado para trabalhar 28 dias em uma obra, com a condição de receber 7$500 em cada dia que trabalhasse, e de pagar 2$500 em cada dia que não compa-

recesse ao trabalho. No fim dos 28 dias, elle recebeu 120$; quantos dias trabalhou? Resp. 19

36. Dividir o numero 55 em duas partes, de sorte que uma esteja para a outra, assim como 2 está para 3.

Solução. Sejam $2x$ um dos numeros; $3x$ será o outro; então a equação será $2x+3x=55$. Sendo $x=11$, um numero será 22 e o outro 33.

Os discipulos que já tiverem estudado proporções em Arithmetica, poderão tambem resolver este problema pelo seguinte modo: $x=$ a um numero, $55-x=$ ao outro numero. Então, $x:55-x::2:3$. Como o producto dos extremos é igual ao producto dos meios, temos a equação $3x=110-2x$, e $x=22$, e $55-x=33$.

Equação

$$2x+3x=55$$
$$5x=55$$
$$x=11$$
$$2x=22$$
$$3x=33.$$

37. A somma de dois numeros é 60, e o menor está para o maior assim como 5 está para 7. Quaes são os numeros? Resp. 25 e 35.

38. Dividir o numero 92 em quatro partes que estejam na proporção de 3, 5, 7 e 8. Resp. 12, 20, 28 e 32.

39. Um vapor que anda 15 milhas por hora com a corrente, e 10 milhas por hora contra ella, gasta 25 horas em ir e voltar de uma cidade á outra. Qual é a distancia entre as duas cidades? Resp. 150 milhas.

40. Achar um numero que multiplicado successivamente por 12 e por 8, a differença de seus productos seja 28. Resp. 7.

41. Um alfaiate póde fazer uma peça de roupa em 6 dias, e sua mulher póde fazel-a em 9 dias; trabalhando juntos, em quantos dias a poderão fazer?

Solução. Sendo $x=$ao tempo, e a obra igual a 1; então o alfaiate faz $\frac{1}{6}$ cada dia, e a mulher faz $\frac{1}{9}$

Em x dias, o alfaiate faz $\frac{x}{6}$ e a mulher $\frac{x}{9}$, e os dois juntos fazem $\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$. O valor de $x=3\frac{3}{5}$ isto é, 3 dias e $\frac{3}{5}$ de um dia.

Equação

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$$
$$3x+2x=18$$
$$5x=18$$
$$x=3\ \frac{3}{5}.$$

42. Um lavrador póde colher todo o seu café em 6 dias; seu filho mais velho o póde colher em 8 dias, e seu filho mais moço o póde colher em 24 dias; trabalhando os tres juntos, em quantos dias o poderão colher? Resp. 3 dias.

43. Um professor gasta $\frac{2}{5}$ do seu ordenado annual em casa e comida, $\frac{1}{3}$ do resto em livros e roupa, e ainda economisa 2:400$ cada anno; qual é o seu ordenado? Resp. 6:000$000

44. Qual é o numero cuja terça parte excede 15 á quarta parte do mesmo numero? Resp. ?

45. Uma raposa perseguida por um galgo, levava-lhe a dianteira de 60 pulos. A raposa dava 9 pulos emquanto o galgo dava 6; mas 3 pulos deste valiam 7 pulos daquella. Quantos pulos deu o galgo para alcançar a raposa?

Solução. Este problema offerece alguma difficuldade por causa das unidades diversas que apparecem nos dados, e por isso vamos resolvel-o.

Se o galgo dava 6 pulos, emquanto a raposa dava 9, deveria dar 1, emquanto a raposa dava $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ pulos.

E se 3 pulos do galgo são iguaes a 7 pulos da raposa, então 1 pulo do galgo é igual a $\frac{7}{3}$ do da raposa. Ora, se o galgo dava 1 pulo, emquanto a raposa dava $\frac{3}{2}$ e se o pulo do galgo estava para o da raposa na razão de $\frac{7}{3}$ para 1, segue-se que o galgo pulava na razão de $1\times\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$ e a raposa na razão de $1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ Nestas duas fracções estão as duas velocidades reduzidas proporcionalmente á mesma unidade de medida.

Seja, pois, x o numero de pulos que dará o galgo para alcançar a raposa. Então o galgo pulará $\frac{7}{3}x$, e a raposa $\frac{3}{2}x$; ora, como o galgo tem de vencer a distancia que anda a raposa e ainda mais os 60 pulos que ella lhe leva de distancia, segue-se que a equação deve ser $\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}+60$, e o resultado é 72 pulos.

Equação

$$\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}+60$$
$$14x=9x+360$$
$$5x=360$$
$$x=72.$$

Verificação. O galgo andou 72 pulos dos seus, no mesmo tempo em que a raposa andou $72\times\frac{3}{2}=108$ pulos dos seus. Ora, 108 pulos com mais 60 que a separam do galgo fazem 168. Como um pulo do galgo vale $\frac{7}{3}$ do pulo da raposa, o galgo andou $72\times\frac{7}{3}=168$ pulos da raposa.

Equações simultaneas com duas incognitas

186. Duas ou mais equações de mais de uma incognita podem ser simultaneas ou independentes.

As equações são **simultaneas** quando cada uma das incognitas tem o mesmo valor nessas equações; assim, $x+y=12$, e $3x-2y=11$ são duas equações simultaneas, porque em ambas x tem o valor de 7, e y tem o valor de 5.

As equações são **independentes** quando, embora tenham as mesmas lettras, só se satisfazem com valores differentes; assim $x+y=18$ e $x+y=36$ são equações independentes, porque teem as mesmas lettras, mas com valores differentes, pois em uma equação sommam 18, e em outra, 36.

Nota. Mais adiante trataremos ainda das equações independentes; aqui precisamos desenvolver sómente o ensino das equações simultaneas.

187. Se tivermos uma só equação com duas quantidades desconhecidas, não poderemos de modo algum saber qual é o verdadeiro valor de cada uma dessas incognitas. Assim, na equação

$$x+y=12,$$

como o numero 12 póde ser formado de muitos modos, como $11+1$, $10+2$, $9+3$, $8+4$, $7+5$, e $6+6$ além de muitos outros,

não podemos saber quaes são os verdadeiros valores que x e y representam. Quando, pois, o numero das quantidades desconhecidas é maior do que o numero das equações, o problema é indeterminado, quer dizer, pode ter muitas soluções.

Mas, se com a equação $x+y=12$ tivermos outra equação auxiliar que seja simultanea com ella, isto é, que tenha as lettras x e y com os mesmos valores, como, por exemplo, a equação $x+2y=17$, então poderemos reduzir estas duas equações a uma só eliminando uma das incognitas, e deste modo, será facil achar o valor da outra, porque se na equação $x+y=12$ o valor de x fôr 7, então o valor y será $12-7=5$.

188. Os problemas que teem mais de uma quantidade desconhecida, devem portanto, ter tantas equações simultaneas quantas forem as quantidades desconhecidas.

189. Chama-se **eliminação** o processo que tem por fim combinar duas equações simultaneas, contendo duas ou mais quantidades desconhecidas, para as reduzir a uma equação simples com uma só incognita.

190. Estudaremos tres methodos ou modos de eliminação:

1.º *Eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente.*
2.º *Eliminação por comparação.*
3.º *Eliminação por substituição.*

Eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente

191. A eliminação pela reducção ao mesmo coefficiente consiste em multiplicar ou dividir uma ou ambas as equações, de modo que o coefficiente de uma incognita fique igual em ambas as equações, para depois, pela addição ou pela subtracção, fazermos desapparecer essa incognita. Esse methodo tem tambem o nome de *eliminação por meio da addição ou subtracção.*

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultaneas $2x+y=15$ e $3x-y=5$?

Solução. Sendo o coefficiente de y igual em ambas as equações (**n.º 22**), mas tendo os signaes differentes, isto é, sendo um + e outro —, elimina-se esta lettra sommando as duas equações membro a membro (**n.º 51**). O resultado da addição é $5x=20$ donde $x=4$.

O valor de y póde ser achado, substituindo-se na 1.ª equação o termo $2x$ pelo seu respectivo valor que é 8; e então teremos $8+y=15$ ou $y=7$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+y &=& 15 & (1.^a) \\ 3x-y &=& 5 & (2.^a) \\ \hline 5x &=& 20 & \\ x &=& 4. & \\ 8+y &=& 15 & \\ y &=& 15-8 & \\ y &=& 7. & \end{array}$$

Problema. Achar o valor de x e de y nas equações simultaneas $3x+2y=34$ e $x+2y=22$.

Solução. Sendo os coefficientes de y iguaes em ambas as equações, e tendo o mesmo signal, elimina-se esta lettra por meio da subtracção. O resultado da subtracção é $2x=12$ ou $x=6$.

O valor de y póde ser achado, substituindo-se na 2.ª equação a lettra x pelo seu valor que é 6, e então teremos $6+2y=22$; $2y=22-6$, e $y=8$.

$$\begin{array}{rcll} 3x+2y &=& 34 & (1.^a) \\ x+2y &=& 22 & (2.^a) \\ \hline 2x &=& 12 & \\ x &=& 6. & \end{array}$$

192. Nos dois problemas que acabamos de resolver, vemos que quando uma incognita tem coefficientes iguaes e signaes differentes, elimina-se por meio da addição das duas equações simultaneas; mas quando tem signaes iguaes, elimina-se por meio da subtracção.

Passemos agora a considerar o caso em que os coefficientes das incognitas são differentes.

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultaneas $4x+3y=37$ e $3x-5y=6$?

Solução. Nestas duas equações simultaneas, como os coefficientes são todos differentes, temos de igualar os coefficientes de x ou de y.

Para igualarmos os coefficientes de x, temos de multiplicar a 1.ª equação por 3, e a 2.ª por 4, e então ambos os coefficientes desta incognita ficam sendo 12. Para igualarmos os coefficientes de y, temos de multiplicar a 1.ª equação por 5, e a 2.ª por 3, e então ambos os coefficientes desta incognita ficam sendo 15. Vamos agora eliminar a lettra x. Multiplicando a 1.ª equação por 3, o producto será a 3.ª equação; e multiplicando a 2.ª equação por 4, o producto será a 4.ª equação. (Vêde **n.º 170**).

Ora, como nestas duas novas equações simultaneas (3.ª e 4.ª) os coefficientes de x são iguaes e teem o mesmo signal, elimina-se esta lettra por meio da subtracção, e o resultado é $29y=87$, ou $y=3$. Substituindo agora na 1.ª equação $3y$ por $3\times3=9$, temos $4x+9=37$ ou $x=7$.

$$\begin{array}{rcll} 4x+3y &=& 37 & (1.^a) \\ 3x-5y &=& 6 & (2.^a) \\ 12x+9y &=& 111 & (3.^a) \\ 12x-20y &=& 24 & (4.^a) \\ \hline 29y &=& 87 & \\ y &=& 3. & \\ 4x+9 &=& 37 & \\ 4x &=& 37-9 & \\ x &=& 7. & \end{array}$$

Regra. *Multiplica-se ou divide-se uma ou ambas as equações por um ou dois numeros, de sorte que os coefficientes da mesma incognita fiquem iguaes em ambas as equações; se os signaes dessa incognita forem differentes, addicionam-se as duas equações, e se forem iguaes, subtrahe-se.*

Nota. Quando uma ou ambas as equações simultaneas teem termos fraccionarios, inteiram-se esses termos, e depois procede-se conforme a regra. (Vêde **n. 175**).

Achar o valor de x e y nas seguintes equações, pelo methodo da reducção ao mesmo coefficiente:

1. $2x + 3y = 13$, $5x - 2y = 10$. Resp. $x=4$, $y=5$
2. $4x + y = 34$, $4y + x = 16$. » $x=8$, $y=2$
3. $30x + 40y = 270$, $50x + 30x = 340$. » $x=5$, $y=3$
4. $2x + 7y = 34$, $5x + 9y = 51$. » ?
5. $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 18$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 21$. » ?
6. $2x + y = 50$, $\frac{x}{6} + \frac{y}{7} = 5$. » ?
7. $5x + 7y = 43$, $11x + 9y = 69$. Resp. ?
8. $8x - 21y = 33$, $6x + 35y = 177$. » ?
9. $21y + 20x = 165$, $77y - 30x = 295$. » ?
10. $11x - 10y = 14$, $5x + 7y = 41$. » ?
11. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 5$. » ?
12. $\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 2$, $4x - 2y = 0$ » ?

Eliminação por comparação

193. A eliminação por comparação consiste em achar o valor da mesma incognita em termos da outra nas duas equações, e depois pela comparação dos dois valores, formar uma equação simples, como vamos ver na seguinte solução:

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=16$ e $2x-y=14$?

Solução. O valor de x na primeira equação é $16-y$; e na segunda equação o valor de $2x$ é $14+y$, e de x é $\frac{14+y}{2}$. Ora, como o valor de x é igual em ambas as equações, segue-se que $16-y=\frac{14+y}{2}$. Resolvida esta equação, vemos que $y=6$; e $x=16-6=10$.

$$x+y=16 \quad (1.^a)$$
$$2x-y=14 \quad (2.^a)$$
$$x=16-y$$
$$x=\frac{14+y}{2}$$
$$16-y=\frac{14+y}{2}$$
$$y=6.$$

Regra. *Acha-se em cada equação o valor da incognita que se quer eliminar, exprimindo o seu valor em termos das outras quantidades.*

Fórma-se uma nova equação destes valores iguaes, e resolve-se como uma equação simples.

O discipulo deve resolver as seguintes equações simultaneas, eliminando a incognita pelo methodo de comparação:

1. $x + y = 12$, $x - y = 4$. Resp. $x=8$, $y=4$
2. $2x + 2y = 36$, $3x - 3y = 18$. Resp. $x=12$, $y=6$
3. $x + y = 20$, $2x + 3y = 42$. Resp. $x=18$, $y=2$
4. $4x + 3y = 13$, $3x + 2y = 9$. Resp. ?
5. $3x + 2y = 118$, $x + 5y = 191$. Resp. ?
6. $4x + 5y = 22$, $7x + 3y = 27$. Resp. ?

Eliminação por substituição

194. A eliminação por substituição consiste em achar em uma equação o valor de uma incognita em termos das outras quantidades, e depois substituir na outra equação aquella incognita por seu valor achado.

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações simultaneas $x+2y=17$ e $2x+3y=28$?

Solução. Na primeira equação x é igual a $17-2y$; substituindo na 2.ª equação x pelo seu valor, que é $(17-2y)$, temos a equação $2(17-2y)+3y=28$. Resolvendo esta equação, temos $y=6$.

Substituindo agora na 1.ª equação $2y$ por $6+6=12$, temos $x+12=17$, e $x=5$.

$$x+2y=17 \quad (1.^a)$$
$$2x+3y=28 \quad (2.^a)$$
$$x=17-2y$$
$$2(17-2y)+3y=28$$
$$\text{ou } 34-4y+3y=28$$
$$y=6, \text{ e } x=5.$$

Regra. *Acha-se em uma equação o valor de uma incognita, e na outra equação substitue-se esta incognita pelo valor achado, e depois resolve-se como na equação simples.*

Achar pelo methodo de substituição os valores de x e y nas seguintes equações simultaneas:

1. $x + 5y = 38$, $3x + 4y = 37$. Resp. $x=3$, $y=7$
2. $2x + 4y = 22$, $5x + 7y = 46$. Resp. $x=5$, $y=3$
3. $3x + 5y = 57$, $5x + 3y = 47$. Resp. $x=4$, $y=9$
4. $4x - 3y = 26$, $3x - 4y = 16$. Resp. ?
5. $2x + 3y = 28$, $3x + 2y = 27$. Resp. ?
6. $4x + y = 43$, $5x + 2y = 56$. Resp. ?

Problemas com duas incognitas

195. Agora, que o discipulo já sabe resolver equações simultaneas com duas quantidades desconhecidas, poderá tambem resolver os problemas que apresentarem o mesmo numero de incognitas.

I Problema. A somma de dois numeros é 25, e a sua differença é igual a 9; quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero maior, e y o numero menor; então a somma dos dois numeros é 25, e a sua differença é 9. Eliminando em ambas as equações a letra y por meio da somma, temos $x=17$, e $y=8$.

Nota. Como já vimos na secção **n.º 191**, este problema póde ser resolvido com uma só incognita; damol-o tambem aqui para o discipulo o resolver com duas. A Algebra offerece meios variados de resolver os problemas.

$$x+y=25$$
$$x-y=9$$
$$2x=34$$
$$x=17$$
$$y=8$$

II Problema. A somma de dois numeros é 44, e um está para o outro assim como 5 está para 6. Quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero maior, e y o numero menor; então, como um está para o outro, assim como 5 para 6, segue-se que $5x=6y$. Subtrahindo a primeira equação da segunda para eliminar a lettra x, temos $y=20$ e $x=24$.

Este problema póde tambem ser resolvido com uma só incognita, na seguinte equação $5x+6x=44$.

$$x+y=44 \quad (1.^a)$$
$$5x-6y=0 \quad (2.^a)$$
$$5x+5y=220$$
$$11y=220$$
$$y=20$$
$$x=24.$$

III Problema. Achar dois numeros taes que, se a metade do primeiro fôr addicionada ao segundo, a somma será 34, e se um terço do segundo fôr addicionado ao primeiro, a somma será 28.

Solução. Seja x o primeiro numero, e y o segundo.

O enunciado do problema está expresso nas duas equações.

Resolvendo o systema, acharemos que $x=20$, e $y=24$.

O discipulo fará a verificação.

$$\frac{x}{2}+y=34$$
$$x+\frac{y}{3}=28$$
$$x=20$$
$$y=24$$

IV Problema. Dois mascates irlandezes contaram o seu dinheiro, e depois disse um ao outro: Dá-me um terço do teu dinheiro, e eu terei 110 libras; respondeu-lhe o outro: Dá-me um quarto do teu dinheiro, e eu terei tambem 110 libras. Quantas libras tinha cada um?

Solução. Seja x o numero de libras que tinha um mascate, e y o que tinha o outro; então pelo enunciado do problema, podemos formular as duas equações que estão ao lado, nas quaes $x=80$ e $y=90$.

$$x+\frac{y}{3}=110$$
$$\frac{x}{4}+y=110$$

5. Achar dois numeros taes que, $\frac{1}{2}$ do primeiro e $\frac{1}{3}$ do segundo sommem 22, e $\frac{1}{4}$ do primeiro e $\frac{1}{5}$ do segundo sommem 12. Quaes são os numeros?

Resp. 24 e 30.

6. Se ao maior de dois numeros se juntasse $\frac{1}{2}$ do menor, a somma seria 37; mas se do menor fosse subtrahido $\frac{1}{4}$ do maior, o resto seria 20. Quaes são os numeros? Resp. ?

rafas de vinho e 25 de cerveja por 280$000. Qual é o preço de cada duzia de garrafas de vinho, e de cerveja?

Resp. Vinho 6$, cerveja 4$.

8. Um fazendeiro vendeu a um visinho 9 cavallos e 7 vaccas por 900$000, e a outro vendeu á razão do mesmo preço 6 cavallos e 13 vaccas pela mesma quantia. Qual é o preço de cada cavallo e de cada vacca?

Resp. 72$ e 36$.

9. Um viajante tinha dois cavallos que lhe custaram certo preço cada um: depois comprou um sellim inglez por 100$000; ora, quando elle punha o sellim no primeiro cavallo, este com o sellim valia o dobro do segundo; e quando punha o sellim no segundo, este com o sellim valia 3 vezes o primeiro. Quanto lhe custou cada cavallo?

Resp. 1.º=60$, 2.º=80$.

10. Se juntarmos 8 ao numerador de uma fracção, ella ficará igual a 2; mas se subtrahirmos 5 do denominador, a fracção ficará igual a 3. Qual é a fracção? Resp. ?

11. Ha dois numeros que sommam 37, e se 3 vezes o menor fôr subtrahido de 4 vezes o maior, e o resto dividido por 6, o quociente será 6. Quaes são os dois numeros?

Resp. 16 e 21.

12. Se subtrahirmos 3 de ambos os termos de uma fracção, ella ficará $\frac{1}{4}$ mas, se juntarmos 5 a ambos os termos, ella ficará $\frac{1}{2}$. Qual é a fracção? Resp. ?

13. Se o maior de dois numeros fosse multiplicado por 5, e o menor por 7, a somma dos seus productos seria 198; mas, se o maior fosse dividido por 5, e o menor por 7, a somma dos seus quocientes seria 6. Quaes são os numeros?

Resp. 20 e 14.

14. Arthur devia 500$000, e Henrique devia 600$000; mas nem um nem outro tinha dinheiro sufficiente para pagar o que deviam. Disse Arthur a Henrique: Empresta-me $\frac{1}{5}$ do teu dinheiro, e eu então poderei pagar o que devo; respondeu-lhe Henrique: Empresta-me $\frac{1}{4}$ do teu dinheiro, e eu pagarei tambem o que devo. Que quantia tinha cada um?

Resp. Arthur 400$, Henrique 500$.

15. Um pai repartiu 2:400$000 por seus dois filhos A e B para elles negociarem. No fim de um anno, A tinha perdido $\frac{1}{4}$ do seu capital, emquanto que B, tendo ganho uma somma igual a $\frac{1}{4}$ do seu capital, achou que o seu dinheiro era justamente igual ao de seu irmão. Que quantia deu o pai a cada um? Resp. A=1:500$000 e B=900$000.

16. Ha 7 annos, a idade de Samuel era tres vezes a idade de Elias, e de hoje a 7 annos, a idade de Samuel será justa-

mente o dobro da idade de Elias. Quaes são as suas idades?
Resp. Samuel 49 e Elias 21.

17. Dividir o numero 75 em duas partes, de sorte que tres vezes a maior exceda 15 a sete vezes a menor. Quaes são as partes? Resp. ?

18. Achar dois numeros taes que a somma de cinco vezes o primeiro e duas vezes o segundo seja 19; e a differença entre sete vezes o primeiro e seis vezes o segundo seja 9. Resp. ?

19. Uma casa e o terreno importaram em 8:500$000, o preço do terreno é $\frac{5}{12}$ do preço da casa. Achar o preço de cada um. Resp. Casa 6:000$, Terreno 2:500$.

20. Dividir 1:280$ por A e B de sorte que a parte de A multiplicada por 7, seja igual a parte de B multiplicada por 9. Resp. ?

21. A differença de dois numeros é 20, e o quociente do maior pelo menor é 3. Quaes são estes numeros? Resp. ?

Equações simultaneas contendo mais de duas incognitas

196. Um systema de mais de duas equações póde ser resolvido por qualquer dos tres methodos de eliminação que explicámos nos capitulos precedentes.

Quando ha mais de duas incognitas, é preferivel o methodo de reducção ao mesmo coefficiente, e é esse o que agora vamos empregar.

Problema. Achar os valores de x, y e z nas equações simultaneas:

$$(1.^a)\quad x+2y+z=20,$$
$$(2.^a)\quad 2x+y+3z=31,$$
$$(3.^a)\quad 3x+4y+2z=44.$$

Solução. Multiplicando por 2 a 1.ª equação para tornar o coefficiente de x igual ao coefficiente de x na 2.ª equação,

temos .... $2x+4y+2z=40$,
subtrahindo a 2.ª equação $2x+y+3z=31$,
temos a 1.ª resultante.. $3y-z=9$.

Multiplicando agora por 3 a 1.ª equação para tornar o coefficiente de x igual ao coefficiente de x na 2.ª equação,

temos .... $3x+6y+3z=60$,
subtrahindo a 3.ª equação $3x+4y+2z=44$,
temos a 2.ª resultante... $2y+z=16$.

Temos agora as duas equações resultantes que são

1.ª resultante .... $3y-z=9$,
2.ª resultante .... $2y+z=16$,
solução .... $5y=25$, e $y=5$.

Sommando as duas equações resultantes, achamos que $y=5$; substituindo na 2.ª resultante o termo de $2y$ por 10, achamos que $z=6$; sub-

stituindo na 1.ª equação os termos $2y$ e z pelos valores $10+6=16$, achamos que $x=4$.

Regra. *Elimina-se uma incognita, combinando uma equação com outra; elimina-se ainda a mesma incognita por outra combinação; e as equações resultantes das duas combinações resolvem-se conforme a regra para duas incognitas.*

Achada uma incognita, as outras se obteem por deducção.

Resolver as seguintes equações simultaneas e os seguintes problemas:

1. $5x-3y+2z=38$, $3x+3y-4z=30$, $x+3y+4z=58$.
2. $2x+5y-3z=4$, $4x-3y+2z=9$, $5x+6y-2z=18$.
3. $2x+3y-4z=20$, $x-2y+3z=6$, $3x-2y+5z=26$.
4. $5x+2y+4z=46$, $3x+2y+z=23$, $10x+5y+4z=75$.
5. $x+y+z=53$, $x+2y+3z=105$, $x+3y+4z=134$.
6. $3x+4z=43$, $2y-z=5$, $5x+3y=43$.
7. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$.
8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=22$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=31$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=32$.

1. Um homem tem tres filhos; a somma das idades do primeiro e do segundo é 27 annos; a somma das idades do primeiro e terceiro é 29, e a do segundo e terceiro é 32. Qual é a idade de cada filho? Resp. 12 annos, 15 e 17.

2. A somma de tres numeros é 59; $\frac{1}{2}$ da differença entre o primeiro e segundo é 5, e $\frac{1}{2}$ da differença entre o primeiro e o terceiro é 9; requer-se achar os tres numeros.
Resp. 29, 19 e 11.

3. Achar tres numeros taes que o primeiro com $\frac{1}{3}$ dos outros dois, o segundo com $\frac{1}{4}$ dos outros dois, e o terceiro com $\frac{1}{5}$ dos outros dois seja cada somma igual a 25.
Resp. 13, 17 e 19.

4. Um menino comprou em uma vez 4 bananas e 5 laranjas por 280 réis; em outra, 6 bananas e 4 pecegos por 360 réis, e em outra, 9 laranjas e 8 pecegos por 840 réis. Qual é o preço de cada fructa?
Resp. Bananas 20 réis, laranjas 40 réis e pecegos 60 réis.

5. Tres pessoas, A, B e C tinham 2:000$000; se A désse 200$ a B, então B teria 100$ mais do que C; mas se B désse 100$ a A, então B teria só $\frac{3}{4}$ do dinheiro de C; requer-se a quantia que cada um possuia.

Resp. A 500$, B 700$ e C 800$.

6. Tres batalhões teem 1905 soldados: $\frac{1}{2}$ do primeiro batalhão com $\frac{1}{3}$ do segundo tem 60 soldados menos do que tem o terceiro batalhão; e $\frac{1}{2}$ do terceiro com $\frac{1}{3}$ do primeiro tem 165 soldados menos do que o segundo batalhão. Qual é o numero de cada um?

Resp. 1.º batalhão 630, 2.º 675 e 3.º 600.

Problemas indeterminados

197. Um problema póde ser determinado ou indeterminado: é **determinado** quando offerece tantas equações ou condições differentes quantas são as suas incognitas ou quantidades desconhecidas. Tem esta denominação, porque a sua solução é determinada e definida, e não admitte nenhuma outra.

Um problema é **indeterminado** quando offerece menos equações do que incognitas. E' assim denominado, porque não tem uma só solução, como os problemas determinados, mas admitte um numero illimitado de soluções ou respostas.

198. Se um problema offerece mais equações do que incognitas, empregam-se sómente as equações necessarias para a solução, e desprezam-se as excedentes; e deste modo, o problema ficará determinado, como vemos no exemplo seguinte:

Problema. Achar dois numeros cuja somma seja 8, a differença 2, e o producto 15.

Solução. Seja x um dos numeros, e y o outro. Neste problema temos só duas incognitas e tres equações. Sommando as duas primeiras equações, temos $x=5$, e, por conseguinte, $y=8-5=3$. A outra equação que é $xy=15$, embora seja exacta, porque $5\times3=15$, foi desnecessaria para a solução, pois não tivemos precisão della para achar o valor das duas incognitas.

$$\begin{array}{rl} x+y=8 & (1.^a) \\ x-y=2 & (2.^a) \\ \hline 2x=10 & \\ x=5. & \end{array}$$

Para os alumnos não acharem difficuldade alguma no ensino dos problemas indeterminados, vamos primeiro distinguir as equações independentes das equações derivadas.

199. Na solução de um problema de duas equações simultaneas, quando queremos eliminar uma das incognitas, operamos com equações independentes e com equações derivadas.

Equações independentes são as que teem a sua origem no enunciado de um problema, e exprimem alguma condição nelle estabelecida; assim as equações

$$4x+3y=37$$
$$3x-5y=6$$

do problema (n.º **192**) da pag. **93**, são independentes.

Equações derivadas são as que se formam das equações independentes por meio de uma addição, subtracção multiplicação ou divisão. Assim das duas equações

$$(1^a)\quad 4x+3y=37$$
$$(2^a)\quad 12x+9y=111$$

a primeira é independente, e a segunda é derivada, porque é o resultado da primeira multiplicada por 3.

A segunda equação portanto não envolve condição alguma que não esteja formulada na primeira, nem com ella poderemos eliminar qualquer incognita da primeira equação; pois se multiplicarmos por 2 todos os termos da primeira, e depois subtrahirmos uma de outra para a eliminação, o resultado será nullo como poderemos verificar.

$$\begin{array}{rl} 2x+4y=32, & (1^a \text{ multiplicada por } 2) \\ 2x+4y=32, & (2^a) \\ \hline 0\quad 0\quad 0. & \end{array}$$

200. Para podermos portanto eliminar uma incognita de duas equações simultaneas, é necessario que essas equações sejam independentes ou derivadas de duas equações independentes.

201. Se derem um problema que estabeleça uma só equação com duas incognitas, como, por exemplo: $x-y=8$, este problema terá forçosamente uma solução indeterminada; pois transformando os seus membros, temos $x=8+y$. Ora fazendo $y=1$, x será igual a 9; fazendo $y=2$, x será igual a 10, e assim por diante como vemos na série que está ao lado. Podemos tambem organizar uma outra série fraccionaria, e neste caso, fazendo $y=1\frac{1}{2}$, x será igual a $9\frac{1}{2}$; fazendo $y=2\frac{1}{2}$, x será igual a $10\frac{1}{2}$ e assim por diante; de modo que poderiamos formar series intermináveis de soluções ou respostas deste problema.

$$x-y=8$$
$$9-1=8$$
$$10-2=8$$
$$11-3=8$$
$$12-4=8$$
$$13-5=8$$
$$14-6=8$$
$$15-7=8$$

Etc.

202. Se nos derem duas equações contendo tres incognitas como,

$$\begin{aligned} (1^a)\quad & x+3y+5z=41, \\ (2^a)\quad & x+2y+3z=28, \\ \hline & y+2z=13. \end{aligned}$$

podemos eliminar a incognita x subtrahindo a segunda equação da primeira, mas o resultado será tambem indeterminado, porque apresenta uma só equação com duas incognitas: $y+2z=13$.

Transpondo os termos desta equação, temos $y=13-2z$. Ora, se fizermos $z=1$, $2z=2$, e y será igual a 11; se fizermos $z=2$, $2z=4$, e y será igual a 9, e assim por diante, como vemos na serie que está ao lado.

Se nas duas equações acima substituirmos as incognitas y e z pelos diversos valores que ellas teem na serie, acharemos que x poderá ter os valores 3, 4, 5, 6, 7, ou 8, conforme os valores da serie, que substituirem y e z; e deste modo a solução fica igualmente indeterminada. Portanto,

$$\begin{aligned} y+2z &= 13 \\ 11+2 &= 13 \\ 9+4 &= 13 \\ 7+6 &= 13 \\ 5+8 &= 13 \\ 3+10 &= 13 \\ 1+12 &= 13. \end{aligned}$$

203. *Quando o numero de incognitas excede ao numero das equações independentes, o problema é indeterminado.*

204. Podemos obter uma solução ou resposta para um problema indeterminado, pelo seguinte processo:

Problema. Comprei 20 aves por 20$000, sendo gallinhas a 1$000, perús a 4$000, e frangos a $200; quantas aves comprei de cada preço?

Solução. Seja x o numero das gallinhas; y o numero dos perús, e z o numero dos frangos. Então,

a 1.ª equação é $1000x+4000y+200z=20000$,
a 2.ª equação é $x+y+z=20$.

Nota-se logo á primeira vista que este problema é indeterminado, porque apresenta tres incognitas, mas offerece sómente duas equações.

Simplificando a primeira equação, dividindo-a por 200, temos .... $5x+20y+z=100$,
subtrahindo della a segunda equação .... $x+y+z=20$,
temos a equação resultante .... $4x+19y=80$.

Fazendo agora $x=1$ que é o menor numero inteiro e positivo, temos $4x=4$, $19y=80-4=76$, e $y=76\div19=4$. Ora, sendo $x=1$ e $y=4$, segue-se que $z=20-1-4=15$, porque os tres numeros devem sommar 20. Então,

$x=1$ gallinha .... 1$000,
$y=4$ perús a 4$000 .... 16$000,
$z=15$ frangos a $200 .... 3$000,
20 aves por .... 20$000.

Este problema tem outras soluções ou respostas, mas como apresentam quantidades fraccionarias, não se prestam para este caso que requer sómente numeros inteiros. Uma dessas soluções é 1 perú, 15 ¼ gallinhas e 3 ¾ frangos. Nesta solução, temos tambem $1+15\frac{1}{4}+3\frac{3}{4}=20$ unidades, na importancia de 4$000+15$250+$750=20$000

DEMONSTRAÇÕES ALGEBRICAS

205. Todas as demonstrações que temos apresentado até aqui, são simples demonstrações arithmeticas, baseadas em raciocinios sobre quantidades particulares e que estão ao alcance até das intelligencias infantis.

As demonstrações propriamente *algebricas* não podem ser apresentadas aos alumnos senão depois que elles sabem operar com facilidade e precisão os diversos processos de uma equação do primeiro grau; antes disso, é muito difficil, se não impossivel, que elles comprehendam com clareza uma demonstração exposta, por meio de um processo, que se transforma completamente em cada operação que se effectua, e que só póde ser comprehendido por aquelles que conhecem o encadeamento inteiro desse trabalho.

Como os alumnos já aprenderam a operar os processos necessarios para resolver qualquer equação do primeiro grau, estão agora no caso de comprehender facilmente como se demonstram algebricamente os enunciados, regras e theoremas da Algebra e da Arithmetica, e de avaliar como são exactos e engenhosos os raciocinios desta demonstração.

Vamos dar agora a demonstração algebrica de alguns theoremas e enunciados algebricos, começando pelos mais simples e faceis de comprehender, para que o alumno não ache difficuldade alguma no encadeamento destes raciocinios.

*

206. Theorema. Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a fórma, mas não alteraremos o valor da fracção.

Demonstração algebrica. Seja $\frac{a}{b}$ a fracção, e q o seu valor; temos portanto $\frac{a}{b}=q$. (1.ª igualdade).

Na fracção $\frac{a}{b}$, a é o dividendo, b é o divisor, e o valor da fracção é o quociente representado por q. Ora, como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, segue-se que $a=bq$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por m, temos $am=bqm$. Dividindo agora os dois membros desta igualdade por bm, temos a 4.ª igualdade. Cancellando no segundo membro desta equação os factores b e m que são communs ao numerador e denominador (n.º **161**), resta q, isto é, $\frac{qm}{bm}=q$. Este resultado mostra que a fracção $\frac{a}{b}$, tendo ambos os termos multiplicados por m, não fica com o valor alterado, porque se conserva igual a q.

$$\frac{a}{b}=q \qquad (1^a)$$

$$a=bq \qquad (2^a)$$

$$am=bqm \qquad (3^a)$$

$$\frac{am}{bm}=\frac{bqm}{bm} \qquad (4^a)$$

$$\frac{am}{bm}=q. \qquad (5^a)$$

Ficou pois demonstrado que $\frac{am}{bm}$ é igual a q; agora, reciprocamente, se dividirmos ambos os termos da fracção $\frac{am}{bm}$ por m, ella ficará $\frac{a}{b}$; e como $\frac{a}{b}$ é igual a q, segue-se que o *valor de uma fracção não se altera, quando multiplicamos ou dividimos ambos os seus termos pela mesma quantidade.*

207. Theorema. Se a mesma quantidade fôr addicionada a ambos os termos de uma fracção propria, a nova fracção resultante será maior do que a primeira; mas se a mesma quantidade fôr addicionada a ambos os termos de uma fracção impropria, a fracção resultante será menor do que a primeira.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}$ a fracção propria, e m a quantidade que se addiciona a cada um de seus termos; então a fracção resultante será $\frac{a+m}{b+m}$.

Reduzindo agora as duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a+m}{b+m}$ ao mesmo denominador (**n.º 153**) para determinar qual dellas é a maior, teremos

$$\frac{a}{b} = \frac{ab+am}{b^2+bm} \qquad \text{e} \qquad \frac{a+m}{b+m} = \frac{ab+bm}{b^2+bm}.$$

Desde que o denominador é o mesmo em ambas as fracções, a fracção maior será a que tiver maior numerador. Se $\frac{a}{b}$ fôr fracção propria, a deverá ser menor do que b, e am menor do que bm, e por conseguinte, $ab+am$ menor do que $ab+bm$, isto é, a fracção resultante será a maior do que a primeira.

Se $\frac{a}{b}$ fôr fracção impropria, é evidente que $ab+am > ab+bm$, isto é, a fracção resultante será menor do que a primeira.

208. Theorema. Se um numero dividir o dividendo e o divisor, dividirá tambem o resto, se o houver.

Demonstração. A demonstração deste theorema baseia-se nos dois principios seguintes:

1.º *A differença entre duas quantidades inteiras deve ser uma quantidade inteira.*

2.º *O quociente de uma divisão exacta deve ser um numero inteiro.*

Seja pois ad o dividendo, bd o divisor, q o quociente e r o resto da divisão. Vamos demonstrar que d dividindo ad e bd, dividirá tambem r.

Como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto, temos $ad=bdq+r$ (1.ª igualdade). Tirando o valor de r temos a 2.ª igualdade. Dividindo os termos desta igualdade por d, temos a 3.ª igualdade. Cancellando agora nos dois termos do segundo membro o factor d que é commum ao numerador e ao denominador, temos $\frac{r}{d}=a-bq$.

$$ad = bdq + r \qquad (1^a)$$

$$r = ad - bdq \qquad (2^a)$$

$$\frac{r}{d} = \frac{ad}{d} - \frac{bdq}{d} \qquad (3^a)$$

$$\frac{r}{d} = a - bq. \qquad (4^a)$$

Esta ultima igualdade mostra-nos a differença de dois numeros inteiros, que deve ser um numero inteiro, como o quociente da divisão de r por d. Ora, se o quociente é inteiro, a divisão é exacta, e r é então divisivel por d. Portanto, *se um numero dividir o dividendo e o divisor, dividirá tambem o resto se o houver.*

209. Theorema. O numero que dividir dois outros dividirá tambem a differença que houver entre elles.

Demonstração. Sejam a e b os dois numeros, e d o divisor de ambos; então, como d divide a e b, dividirá tambem $a-b$ que é a sua differença.

Se d divide exactamente a e b, os quocientes q e q' hão de ser necessariamente numeros inteiros.

Desde que $a=dq$ e $b=dq'$ segue-se que $a-b=dq-dq'$ (1.ª igualdade). Dividindo agora os dois membros da igualdade por d, temos a 2.ª igualdade. Cancellando agora nos dois termos do segundo membro desta igualdade, o factor d que é commum ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade. Ora, como q e q' são numeros inteiros, a sua differença tambem deve ser um numero inteiro, e se o quociente de $\frac{a-b}{d}$ é um numero inteiro, mostra que a divisão é exacta, e que a differença $a-b$ é divisivel por d. Portanto, o *numero que dividir dois outros numeros, dividirá tambem a differença que houver entre elles.*

$$\frac{a}{d} = q \text{ ou } a = dq$$

$$\frac{b}{d} = q' \text{ ou } b = dq'$$

$$a - b = dq - dq' \qquad (1^a)$$

$$\frac{a-b}{d} = \frac{dq}{d} - \frac{dq'}{d} \qquad (2^a)$$

$$\frac{a-b}{d} = q - q' \qquad (3^a)$$

As quatro operações sobre fracções

210. Sommar. Demonstrar que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$.

Demonstração. Em Algebra bem como em Arithmetica, as *fracções* devem ter um denominador commum para se poder operar a addição e a subtracção. As fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$, reduzidas ao mesmo denominador ficam $\frac{a^2}{ab}$ e $\frac{b^2}{ab}$ (Vêde **n.º 153**).

Seja pois $\frac{a^2}{ab}=m$, e $\frac{b^2}{ab}=n$.

Então $a^2+b^2=abm+abn$, 1.ª igualdade. Dividindo todos os termos desta igualdade por ab, temos a 2.ª igualdade. Cancellando agora nos termos do segundo membro os factores a e b que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que apresenta a somma de $m+n$, valores das duas fracções, igual a $\frac{a^2+b^2}{ab}$.

$$\frac{a^2}{ab} = m \therefore a^2 = abm$$

$$\frac{b^2}{ab} = n \therefore b^2 = abn$$

$$a^2 + b^2 = abm + abn \qquad (1^a)$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{abm}{ab} + \frac{abn}{ab} \qquad (2^a)$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = m + n. \qquad (3^a)$$

Daqui concluimos que, *para se sommar fracções reduzem-se as mesmas a um denominador commum, e escreve-se a somma dos numeradores sobre elle* (**n.º 157**).

211. Subtrahir. Demonstrar que $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

Demonstração. As fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ reduzidas ao mesmo denominador, dão $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$.

Seja $\frac{ad}{bd} = m$, e $\frac{bc}{bd} = n$. Então temos $ad = bdm$, e $bc = bdn$ ou $ad - bc = bdm - bdn$. Dividindo todos os termos desta igualdade por bd temos a 2.ª igualdade. Cancellando os factores communs no segundo membro, temos a 3.ª igualdade, que mostra que a differença entre m e n, que são os valores das duas fracções, é igual a $\frac{ad-bc}{bd}$. Daqui concluimos que *para se subtrahir uma fracção de outra, reduzem-se ambas a um denominador commum e escreve-se sobre elle a differença dos numeradores* (**n.º 168**).

$$\frac{ad}{bd} = m \therefore ad = bdm$$

$$\frac{bc}{bd} = n \therefore bc = bdn$$

$$ad = bdm, \text{ e } bc = bdn$$

$$ad - bc = bdm - bdn \qquad (1^a)$$

$$\frac{ad - bc}{bd} = \frac{\cancel{bd}m}{\cancel{bd}} - \frac{\cancel{bd}n}{\cancel{bd}} \qquad (2^a)$$

$$\frac{ad - bc}{bd} = m - n. \qquad (3^a)$$

212. Multiplicar. Demonstrar que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$. Então temos $a = bm$, e $c = dn$, ou $ac = bmdn$, 1.ª igualdade. Dividindo os termos desta igualdade por bd, temos a 2.ª igualdade. Cancellando agora os factores b e d que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que mostra que o producto de m por n, isto é, das duas fracções, é igual a $\frac{ac}{bd}$. Daqui concluimos que *para se achar o producto de duas fracções, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores, e a fracção resultante será o producto* (**n.º 160**).

$$a = bm, \text{ e } c = dn$$

$$a \times c = bm \times dn$$

$$ac = bmdn \qquad (1^a)$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\cancel{b}m\cancel{d}n}{\cancel{bd}} \qquad (2^a)$$

$$\frac{ac}{bd} = mn. \qquad (3^a)$$

213. Dividir. Demonstrar que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$; Então temos $a = bm$, e $c = dn$, ou dividindo um pelo outro $\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$.

Multiplicando agora ambos os membros desta igualdade por $\frac{d}{b}$, temos a 2.ª igualdade. Cancellando no segundo membro os factores b e d que são communs ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que mostra que a divisão de m por n que são os valores das duas fracções, é igual a $\frac{ad}{bc}$. Ora, este quociente é o producto do dividendo $\frac{a}{b}$ pelo divisor $\frac{c}{d}$ com os termos invertidos $\frac{d}{c}$. Daqui concluimos que *para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas fracções* (**n.º 163**).

$$a = bm, \text{ e } c = dn$$

$$\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn} \qquad (1^a)$$

$$\frac{a \times d}{c \times b} = \frac{\cancel{b}m \times \cancel{d}}{\cancel{d}n \times \cancel{b}} \qquad (2^a)$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}. \qquad (3^a)$$

214. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida terá uma só raiz, isto é, um só valor ou resposta que póde verificar a equação.

Demonstração. Seja x a quantidade desconhecida; a a somma dos coefficientes positivos de x; e $-c$ a somma dos coefficientes negativos; seja tambem b a somma das quantidades conhecidas que são positivas, e $-d$ a somma das que são negativas. Então temos o resultado que está ao lado. Fazendo agora $b - d = n$, e $a - c = m$, temos $x = \frac{n}{m}$.

$$ax - cx = b - d$$

$$x(a - c) = b - d$$

$$x = \frac{b - d}{a - c}$$

Ora, desde que n dividido por m não póde ter senão um quociente, segue-se que *uma equação do primeiro grau com uma só incognita, não póde ter senão uma raiz.*

Nota. Os exemplos que acabamos de expôr, habilitarão os alumnos a comprehender, sem difficuldade, as outras demonstrações algebricas que apresentaremos no desenvolvimento desta obra.

GENERALIZAÇÃO

215. Quando as quantidades conhecidas de um problema algebrico são representadas por lettras, estas quantidades chamam-se **valores geraes**, porque o resultado da solução apresenta um modo geral de resolver todos os problemas da mesma especie. **Generalizar um problema** é pois substituir os seus valores particulares ou dados por valores geraes representados por lettras, para que o valor da incognita seja expresso em uma fórmula algebrica.

216. Fórmula é o valor da incognita de um problema generalizado, expresso em linguagem algebrica, e que serve de regra geral para resolver problemas semelhantes que apenas differem no valor particular de seus dados.

217. Regra é a traducção de uma fórmula algebrica feita em linguagem commum. Assim a fórmula $\frac{ab}{a+b}$, traduzida ou expressa em linguagem commum, quer dizer: *O producto de* **a** *multiplicado por* **b** *dividido pela somma de* **a** *mais* **b**.

Vamos agora resolver alguns problemas generalizados para elucidar este ponto.

Primeiro caso da generalização

218. Problema. A somma de dois numeros é 68, e a sua differença é 20; quaes são os numeros?

Solução. Seja x o numero maior, e $x-20$ será o numero menor. Pelas condições do problema, o numero maior é 44, e o menor é 24.

$$x+x-20=68$$
$$2x=88$$
$$x=44$$
$$x-20=24.$$

Se tivessemos de resolver agora muitos problemas desta natureza, em cada um delles teriamos de esclarecer identica equação e repetir o mesmo trabalho.

Generalizando porém, este problema, obtemos uma fórmula que resolverá facilmente todos os problemas da mesma natureza.

Generalizemos pois estes problemas:

A somma de dois numeros é **s**, *e a sua differença é* **d**; *quaes são os numeros?*

Solução. Seja x o numero maior, e $x-d$ o numero menor. Temos então a equação $x+x-d=s$. Resolvida a equação, vemos que o numero maior é $\frac{s+d}{2}$, e o numero menor é $\frac{s-d}{2}$.

$$x+x-d=s$$
$$x+x=s+d$$
$$2x=s+d$$
$$x=\frac{s+d}{2}$$
$$x-d=\frac{s-d}{2}.$$

A solução deste problema generadizado apresenta duas fórmulas: uma é $\frac{s+d}{2}$, a outra e $\frac{s-d}{2}$.

Estas duas fórmulas estabelecem a seguinte regra da Arithmetica:

Para acharmos dois numeros, quando conhecemos a sua somma e a sua differença, ajuntaremos a metade da somma com a metade da differença, e teremos o numero maior; e subtrahindo da metade da somma a metade da differença, teremos o numero menor.

Appliquemos agora estas fórmulas na solução dos seguintes problemas:

1. A somma de dois numeros é 100, e a sua differença é 6; quaes são os numeros?

Solução. Se substituirmos nas duas fórmulas as lettras s e d pelos seus respectivos valores, teremos:

$$\frac{s+d}{2}=\frac{100+6}{2}=53 \text{ numero maior,}$$

$$\frac{s-d}{2}=\frac{100-6}{2}=47 \text{ numero menor.}$$

2. Dois numeros sommam 44, e a sua differença é 6; quaes são os numeros? Resp. 25 e 19.

3. A somma das idades de um pae e seu filho é 85 annos; a differença destas idades é 21 annos; quaes são as suas idades? Resp. 53 e 32.

4. Dois batalhões teem 1550 soldados; a differença de numero entre um e outro batalhão é 70; quantos soldados tem cada batalhão? Resp. 810 e 740.

Segundo caso de generalização

219. Problema. Qual é o numero que sendo dividido por 3 e por 5, a somma destes quocientes é 16?

Solução. Seja x o numero requerido. Resolvida a equação, vemos que o valor de x é 30.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=16$$
$$5x+3x=240$$
$$x=30.$$

Generalizemos agora este problema:

Qual é o numero que, sendo dividido por **a** *e por* **b**, *a somma dos dois quocientes é* **c**?

Solução. Seja x o numero requerido; a equação será então $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. Resolvida a equação, temos $x=\frac{abc}{b+a}$, isto é, o producto dos tres dados divididos pela somma dos dois divisores.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$$
$$bx+ax=abc$$
$$x(b+a)=abc$$
$$x=\frac{abc}{b+a}$$

A solução deste problema dá a fórmula que resolve todos os problemas desta natureza.

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Achar um numero que dividido por 3 e por 7, a somma destes quocientes seja 20.

Solução. Substituindo na fórmula acima as lettras a, b e c pelos seus respectivos valores, temos:

$$\frac{abc}{b+a}=\frac{3\times7\times20}{3+7}=\frac{420}{10}=42.$$

2. Qual é o numero que dividido successivamente por 4 e por 5, a somma destes quocientes é 45. Resp. 100.

3. Achar um numero que dividido successivamente por 5 e por 6, a differença destes quocientes seja 2?

Solução. Neste problema, como é dada a differença entre quocientes, a fórmula, em vez da somma, deverá conter a differença entre os divisores.

$$\frac{abc}{b-a}=\frac{5\times6\times2}{6-5}=\frac{60}{1}=60.$$

Terceiro caso de generalização

220. Problema. Uma lebre foge de um cão que a persegue a 60 metros de distancia; o cão corre 40 metros por minuto, e a lebre corre 36; em quantos minutos o cão alcançará a lebre?

Solução. Seja x o numero de minutos. O cão andando 40 metros por minuto, em x minutos anda $40x$. Por identica razão a lebre anda $36x$.

Para o cão alcançar a lebre, é necessario que elle vença os $36x$ que anda a lebre, e ainda os 60 metros que o separam della. Pelas condições do problema, a equação deve ser $40x=36x+60$. Resolvida a equação, vemos que o numero de minutos requerido é 15.

$$40x=36x+60$$
$$40x-36x=60$$
$$4x=60$$
$$x=15.$$

Generalizemos este problema, substituindo as quantidades particulares 60, 40 e 36, pelas quantidades geraes a, m e n.

Solução. Temos a equação $mx=nx+a$; resolvida esta equação, temos a fórmula $\frac{a}{m-n}$ que resolve todos os problemas desta natureza, e que, traduzida em linguagem commum, quer dizer:

A distancia dividida pela differença das velocidades, dá o tempo requerido.

$$mx=nx+a$$
$$mx-nx=a$$
$$x(m-n)=a$$
$$x=\frac{a}{m-n}$$

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Do porto do Rio de Janeiro sahiu um vapor navegando 12 milhas por hora; quando já tinha alcançado a distancia de 72 milhas, sahiu do mesmo porto outro vapor no mesmo rumo, navegando 16 milhas por hora; em quantas horas o ultimo vapor alcançou o primeiro?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{72}{16-12}=\frac{72}{4}=18$ horas.

2. Um gavião vendo uma pomba que estava a 80 metros de distancia delle, voou para alcançal-a; no mesmo instante a pomba fugiu do gavião; ora, voando o gavião em cada minuto mais 8 metros do que a pomba, em quantos minutos a alcançaria?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{80}{8}=10$ minutos.

3. Entre dois viajantes que seguem a mesma direcção pela mesma estrada, ha uma distancia de 56 kilometros; o que vai na frente anda 6 kilometros por hora, e o outro 10; em quantas horas este alcançará aquelle?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{56}{10-6}=\frac{56}{4}=14$ horas.

Quarto caso de generalização

221. Problema. Um homem póde fazer um trabalho em 8 dias; outro o póde fazer em 12 dias; trabalhando juntos, em quantos dias o poderão fazer?

Solução. Seja x o numero de dias requerido; como um homem faz o trabalho em 8 dias, em um dia fará $\frac{1}{8}$ do trabalho, e em x dias fará $\frac{x}{8}$. Por semelhante razão, o outro homem fará $\frac{x}{12}$. Ora como ambos fazem o trabalho, que é 1 inteiro, segue-se que a equação deve ser $\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$, que dá $x=4\frac{4}{5}$ dias.

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$$
$$3x+2x=24$$
$$5x=24$$
$$x=4\tfrac{4}{5}$$

Generalizando agora este problema, substituindo os valores particulares 8 e 12 pelos valores geraes a e b, temos a equação ao lado que, resolvida, nos dá a fórmula $\frac{ab}{a+b}$ que resolve todos os problemas desta natureza.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$$
$$ax+bx=ab$$
$$x(a+b)=ab$$
$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Um tanque tem duas torneiras, uma o enche em 6 horas, e a outra em 9 horas; abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{6\times9}{6+9}=\frac{54}{15}=3\frac{3}{5}$ horas.

2. Uma vacca póde comer um sacco de farelo em 7 dias, e um boi póde comel-o em 5 dias; em quantos dias o poderão comer ambos?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{7\times5}{7+5}=?$ Resp. $2\frac{11}{12}$.

3. A. póde fazer uma obra em 10 dias, B. póde fazel-a em 20 dias; em quantos dias a poderão fazer os dois trabalhando juntos? Resp. $6\frac{2}{3}$

Nota. Poderiamos apresentar ainda muitos outros casos de generalização; estes, porém são sufficientes, para nos mostrar que as mais importantes regras da Arithmetica são baseadas nas formulas obtidas na solução dos problemas generalizados.

FÓRMAS DA SOLUÇÃO

222. O resultado da solução de um problema póde apparecer com uma das seis fórmas seguintes denominadas:

1.ª *Solução positiva,*	4.ª *Solução zero,*
2.ª *Solução negativa,*	5.ª *Solução indeterminada,*
3.ª *Solução infinita,*	6.ª *Solução absurda.*

Consideremos cada uma destas soluções separadamente.

Solução positiva

223. Solução positiva é aquella que temos obtido em todos os problemas resolvidos até esta pagina. A solução positiva dá á incognita um valor positivo que satisfaz perfeitamente todas as condições do problema, como podemos reconhecer por meio de uma verificação.

Se algumas vezes a incognita e o seu respectivo valor apparecem com o signal negativo, como: $-x=-4$, isto provém da inversão na ordem dos membros da equação; mas este resultado se corrige facilmente, e a solução se torna positiva, mudando a ordem dos termos da solução, como: $4=x$, ou mudando os signaes de ambos os termos, como: $x=4$. Com estas mudanças a equação não soffre alteração alguma, como ficou exposto na secção **n.º 176**, *Regra*. (Vêde **n.º 185**, VIII Prob.).

Esta é a solução natural que os discipulos já conhecem, porque a teem obtido em todos os problemas já resolvidos, e por isso não precisam de mais esclarecimentos sobre ella.

Passemos pois, ás outras soluções que ainda são desconhecidas.

Solução negativa

224. Já vimos na secção **n.º 11** que, quando uma quantidade não tem signal algum, subentende-se o signal positivo $+$, e que todas as quantidades são consideradas positivas, se não forem de outro modo designadas. Do mesmo modo, o valor da incognita é considerado positivo, quando a incognita tambem o é. Assim $x=8$ quer dizer $+x=+8$.

225. Algumas vezes, porém, acontece que, na solução de um problema, a incognita tem o signal positivo subentendido, e o seu valor apparece com o signal negativo, como $x=-4$. A este resultado dá-se o nome de **solução negativa.**

Exemplifiquemos este caso com o seguinte problema: *Em um armazem ha um certo numero de saccas de café; o triplo desse numero menos 100 é igual a quatro vezes o seu numero mais 200; qual é o numero de saccas?*

Solução. Seja x o numero das saccas; então temos a seguinte

equação $4x+200=3x-100$,
transpondo $4x-3x=-100-200$,
reduzindo $x=-300$.

O resultado $x=-300$, ainda que satisfaça a questão do ponto de vista algebrico, não a satisfaz do ponto de vista arithmetico, porque em um armazem não póde haver -300 saccas de café. Essa solução mostra, pois, que ha algum defeito ou engano no enunciado, ou então se dá uma interpretação errada ao problema. Estes erros podem ser facilmente corrigidos.

Neste problema, o engano está na troca dos signaes, pois em lugar de $+200$, e -100, deve ser -200, e $+100$. Corrigindo, assim, este problema, a equação será $4x-200=3x+100$, e $x=300$, isto é, a solução positiva.

226. Problema. *A idade de um pai é 40 annos, e a de seu filho é 13, em que época a idade do pai será o quadruplo da idade do filho?*

Solução. Seja x o numero que falta para chegar á época requerida. Nessa data a idade do filho será $13+x$ e a do pae $40+x$. Como esta deve ser o quadruplo da outra a equação será $4(13+x)=40+x$. Resolvida a equação, temos $x=-4$.

1.ª Equação

$$4(13+x)=(40+x)$$
$$52+4x=40+x$$
$$3x=-12$$
$$x=-4.$$

Este resultado negativo nos mostra que ha algum engano a corrigir. Pela simples leitura deste problema, fomos levados a julgar erradamente que essa relação de idades se effectuaria em uma época posterior aos 40 annos do pae, e não antes.

Se o enunciado dissesse: «*Em que época a idade do pae foi o quadruplo da idade do filho?*» logo comprehenderiamos que era em uma época anterior aos 40 annos, e teriamos formulado a 2.ª equação, cujo resultado mostra que a época requerida no problema, foi quando o pae tinha $40-4=36$ annos, e o filho $13-4=9$.

2.ª Equação

$$4(13-x)=(40-x)$$
$$52-4x=40-x$$
$$-3x=-12$$
$$x=4.$$

Nesta solução vemos que a falta de clareza no problema, levou-nos a uma interpretação errada, do que fomos logo advertidos pela solução negativa $x=-4$.

227. Os exemplos que temos apresentado, fundamentam os dois seguintes principios:

1.º *Uma solução negativa indica em geral alguma troca de signaes ou outro defeito no enunciado do problema.*

2.º *Quando se obtem uma solução negativa, o enunciado do problema póde ser corrigido trocando-se os signaes ou modificando-se o sentido que se lhe deu; de sorte que a solução exprima exactamente o valor da incognita no sentido positivo.*

Solução infinita

228. A palavra *infinito* tem diversos sentidos. Em Algebra, ella tem uma significação particular que não póde ser facilmente comprehendida senão depois de termos uma ideia clara da materia da sua applicação. E' pois conveniente estudarmos primeiro o caso em que este termo é applicado, para depois comprehendermos facilmente a definição que se lhe dá no sentido algebrico.

229. Quando os dois termos de uma fracção qualquer são quantidades finitas e determinadas, a fracção deverá ter tambem um valor finito e determinado. Assim o valor da fracção $\frac{a}{b}$ é o quociente de a dividido por b. Mas se um ou ambos os termos desta fracção forem substituidos por zeros, os quocientes ou resultados serão

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{0}{0}.$$

Examinemos separadamente cada uma destas expressões algebricas, para vermos o valor ou significação que devem ter.

230. Uma fracção algebrica é uma divisão, e em uma divisão, é evidente que, quanto menor fôr o divisor, tanto maior será o quociente.

Se na fracção $\frac{a}{b}$, o dividendo fôr constante, e o divisor fôr diminuindo de valor, o quociente irá crescendo sempre á medida que o divisor fôr diminuindo. Se o divisor fôr reduzido a um decimo, a um centesimo ou a um millesimo do seu valor, o quociente se tornará dez, cem ou mil vezes maior.

Se o divisor b fôr reduzido a um millionesimo, o quociente se tornará um milhão de vezes maior, porque $\frac{a}{0,000\,001} = 1000000\,a$ ou um milhão de vezes o valor de a; se o divisor se tornar ainda menor, o quociente se tornará ainda maior. De modo que, se o divisor se tornar a menor quantidade assignalavel, isto é, o menor de todos os numeros, o quociente se tornará a maior quantidade assignalavel, isto é, o maior de todos os numeros. E se o divisor descer a zero, limite sem valor algum, o quociente tocará no extremo opposto que é o *infinito*, e se tornará uma *quantidade infinita*.

231. Para se exprimir em Algebra este quociente, emprega-se o symbolo ∞ que se chama *infinito*.

De sorte que $\frac{a}{0} = \infty$ lê-se: *A quantidade* **a** *dividida por zero é igual ao infinito.*

Em Algebra, pois, uma quantidade infinita quer dizer: *uma grandeza maior do que qualquer outra grandeza assignalavel da mesma especie.*

232. Na solução de um problema, quando o valor da incognita apparece com a fórmula de $\frac{a}{0} = \infty$, devemos entender por esta expressão algebrica que não ha valor algum finito que satisfaça as condições do problema, isto é, não ha numero algum que multiplicado por zero, dê um producto igual a quantidade a; por este motivo, esta solução se denomina **solução infinita** ou mais propriamente **solução impossivel**, porque é exactamente esta ideia que ella exprime.

Nota. No capitulo denominado *Discussão dos problemas* veremos este caso exemplificado, bem como os casos das outras soluções.

Solução zero

233. Se na fracção $\frac{a}{b}$, o denominador b fôr constante, e o numerador a fôr diminuido de valor, o quociente ou valor da fracção irá tambem diminuindo. Assim as fracções $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{6}$ teem um denominador igual, mas porque o numerador vai diminuindo de valor, cada uma destas fracções é menor que a precedente.

Portanto, se o numerador a diminuir de valor, e se tornar o menor dos numeros, o valor da fracção diminuirá do mesmo modo; e finalmente se o numerador descer a zero, a fracção $\frac{a}{b}$ ficará reduzida tambem a zero e se exprimirá: $\frac{0}{b} = 0$, que se lê: *Zero dividido pela quantidade* **b** *é igual a zero.*

234. Quando, pois, o resultado da solução de um problema apparece com a fórma $\frac{0}{b}$, chama-se **solução zero**, e quer dizer que não ha necessidade de quantidade alguma para satisfazer as condições do problema, e por isso a resposta é zero.

Solução indeterminada

235. Se na fracção $\frac{a}{b}$ ambos os termos forem substituidos por zeros, o resultado será $\frac{0}{0}$. Ora, zero dividido por zero, não tem em Arithmetica significação alguma, mas em Algebra, tem uma significação importante que deve ser perfeitamente conhecida.

236. Quando o valor da incognita em uma equação do primeiro grau apparece com a fórma $\frac{0}{0}$, qualquer quantidade

póde satisfazer as condições do problema. Com effeito, numa divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente; ora, desde que qualquer numero, multiplicado pelo divisor zero, dá um producto igual ao dividendo zero ($0=0\times\times x$), segue-se que o symbolo $\frac{0}{0}$ exprime uma quantidade qualquer. Por isso, o resultado $\frac{0}{0}$ chama-se **Solução indeterminada**, porque exprime uma quantidade indeterminada, isto é, um numero qualquer.

237. Algumas vezes o valor da incognita apresenta-se com a fórma indeterminada $\frac{0}{0}$, sem comtudo o ser, como vemos no exemplo seguinte:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}.$$

Se dermos á quantidade a o valor de 4, a^2 será 16, e então teremos

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{16-16}{4-4}=\frac{0}{0}.$$

Mas se simplificarmos a fracção, supprimindo o factor $(a-4)$ que é commum ao numerador e ao denominador, teremos o seguinte resultado:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{(a-4)\ (a+4)}{a-4}=a+4.$$

Ora, como demos a a o valor de 4, segue-se que o resultado desta equação é $4+4=8$, e não $\frac{0}{0}$ como acima obtivemos.

Podemos evitar facilmente este engano, se, antes de darmos a solução por concluida, reduzirmos o valor da incognita á sua expressão mais simples, supprimindo os factores communs ao numerador e ao denominador.

238. Na solução de alguns problemas, obtem-se uma outra fórma que tambem exprime uma quantidade indeterminada. Essa fórma é $0=0$, que se lê: *Zero igual a zero.*

Vamos resolver um problema que nos dará a fórma $0=0$.

Problema. Ha um numero do qual $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{6}$ dão uma somma igual a $\frac{1}{2}$ do mesmo numero; qual é esse numero?

Solução. Seja x o numero. Então temos $\quad \frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{x}{2},$

inteirando $\quad 2x+x=3x,$

transpondo $\quad 2x+x-3x=0,$

reduzindo $\quad 0=0$

O resultado $0=0$ mostra que qualquer numero satisfaz as condições do problema. E isto é evidente, porque $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ são iguaes a $\frac{1}{2}$; ora, em qualquer numero $\frac{1}{2}$ igual a outro $\frac{1}{2}$, isto é, uma metade igual a outra metade.

239. Quando a fórma $\frac{0}{0}$ ou $0=0$ apparece como o resultado da solução algebrica de um problema, quer dizer que a **solução é indeterminada.**

Solução absurda

240. Uma equação é uma traducção fiel do enunciado de um problema; o que o problema diz em linguagem commum, a equação exprime com clareza em linguagem algebrica, por isso quando os dados de um problema são exactos, e as condições razoaveis, a solução dá não só o valor da incognita, mas attesta tambem a verdade exposta no enunciado. Mas assim como uma equação traduz fielmente qualquer verdade ou exactidão de um problema, traduz egualmente qualquer absurdo ou disparate que elle contenha.

241. Quando pois ha algum absurdo nos dados ou nas condições de um problema, esse dislate apparece com toda a clareza no resultado final da equação, que dá o valor da incognita.

Exemplifiquemos este ponto com o seguinte problema: *Qual é o numero cujos $\frac{7}{12}$ menos 5 inteiros são iguaes á differença que ha entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ do mesmo numero e mais 7?*

Solução. Seja x o numero. Então temos $\quad \frac{7x}{12}-5=\frac{3x}{4}-\frac{x}{6}+7,$

inteirando $\quad 7x-60=9x-2x+84,$

transpondo $\quad 7x+2x-9x=84+60,$

reduzindo $\quad 0=144.$

O erro ou dislate apparece claramente no resultado da solução $0=144$; ora é um absurdo affirmar que zero é igual a 144 unidades, e por isso este resultado tem o nome de **solução absurda.**

Não havendo engano algum no processo da solução, o absurdo não póde partir senão do enunciado do problema. E com effeito, se examinarmos as condições propostas veremos logo a sua disparidade, porque a differença entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ é $\frac{7}{12}$; ora $\frac{7}{12}-5$ não póde ser igual a $\frac{7}{12}+7$, como affirma o problema.

Quando pois, pela simples leitura de um problema, não pudermos perceber o absurdo que elle enuncia, o resultado da solução o mostrará com clareza.

242. Se dermos á lettra n um valor qualquer, teremos a seguinte tabella resumida das expressões algebricas das diversas soluções.

Solução positiva, $x = n$	Solução zero, $x = \frac{0}{n}$
Solução negativa, $x = -n$	Solução indeterminada, $x = \frac{0}{0}$
Solução infinita. $x = \frac{n}{0} = \infty$	Solução absurda, $0 = n$.

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

243. Quando um problema se apresenta generalizado, isto é, quando suas quantidades conhecidas estão representadas por lettras (n.° **215**), podemos indagar quaes serão os diversos resultados da solução desse problema, se attribuirmos a essas quantidades valores particulares ou imaginarios.

244. Discutir um problema é attribuir valores particulares ás suas quantidades generalizadas, e depois interpretar os seus resultados.

A discussão do seguinte problema nos dará o esclarecimento necessario para comprehendermos devidamente este ponto:

Problema. *Dois correios partiram ao mesmo tempo de dois logares A e B que distam* a *milhas um do outro; seguindo ambos a mesma direcção, um andava* m *milhas por hora, e o outro* n *milhas; em quantas horas um alcançará o outro?*

Solução. Ha muitos modos de resolver este problema; aqui daremos o mais facil.

	Equação
Seja x o numero de horas requerido; como um correio anda m milhas por hora, em x horas, elle andará mx; por semelhante razão, o outro correio andará nx. Como ignoramos os valores de m e n, supponhamos que $m > n$.	$mx = nx + a$
	$mx - nx = a$
O correio que anda mx, para alcançar o outro, tem de vencer a distancia a, e ainda a distancia nx que o outro correio anda. A equação deve ser	$x(m - n) = a$
portanto, $mx = nx + a$, e o resultado, $x = \frac{a}{m-n}$	$x = \frac{a}{m-n}$.

246. Discussão do problema. A resposta, que é o numero de horas necessarias ao encontro, apparece com a fórma $\frac{a}{m-n}$, isto é, a distancia que separa inicialmente os dois trens, dividida pela differença entre as velocidades $m-n$.

Ora a solução $\frac{a}{m-n}$ póde ter cinco resultados ou fórmas diversas, segundo os valores que attribuirmos ás lettras a, m e n.

1.ª Fórma. Supponhamos que as tres quantidades a, m e n sejam positivas e que m seja maior do que n. Neste caso o numero de horas requerido no problema será uma quantidade positiva, porque sendo $m > n$, a differença entre estas duas quantidades será positiva; e a quantidade a dividida por um divisor positivo, dará um quociente positivo.

Ora, isto é evidente das circumstancias do problema, porque se o correio que vai atraz, é mais veloz do que o que vai adiante, é claro que a distancia que os separa, irá diminuindo, e no fim de certo numero de horas, essa distancia desapparecerá, e elles ficarão juntos. Poderemos fazer esta verificação com valores particulares. Se dermos ás lettras a, m e n os valores 20, 8 e 4, teremos o seguinte resultado:

$$x = \frac{a}{m-n} = \frac{20}{8-4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ horas.}$$

Isto quer dizer que, se a distancia que separa os correios fôr 20 milhas, e um andar 8 milhas por hora, e outro 4, elles estarão juntos no fim de 5 horas. Nesta supposição a **solução é positiva.**

2.ª Fórma. Supponhamos agora que m seja menor do que n, neste caso, o valor de x será negativo, porque, sendo n maior do que m, o resultado de $m-n$ será negativo, e a quantidade positiva a dividida por $m-n$ dará um quociente negativo.

Poderemos verificar facilmente este resultado por meio de algarismos. Como n é maior do que m, daremos a m o valor de 4, e a n o valor de 8. Então,

$$x = \frac{a}{m-n} = \frac{20}{4-8} = \frac{20}{-4} = -5, \text{ isto é, } x = -5.$$

Ora quando o valor da incognita apparece negativo, mostra que ha no problema algum defeito que deve ser corrigido. Nesta supposição dos valores, o defeito é evidente, porque se o correio que vai adiante, é mais veloz do que o que vai atraz, é claro que este nunca poderá alcançar aquelle; e quanto mais caminharem, maior distancia os separará. Neste caso a **solução é negativa**, e mostra que o problema deve ser modificado para ter uma solução positiva.

Pela simples leitura do problema, comprehendemos que os dois correios seguiam a direcção:

$$m \ldots\ldots\ldots n \ldots\ldots\ldots \longrightarrow$$

mas o problema não dizendo qual delles ia adiante ou atraz, não nos auctoriza a pensar assim, e por isso podemos modificar o sentido da direcção fazendo-os seguir em caminho opposto:

$$\longleftarrow \quad \ldots\ldots\ldots m \ldots\ldots\ldots n$$

e deste modo a solução se tornará positiva, porque sendo $n > m$, a differença $(n-m)$ será positiva, e a quantidade a dividida por um divisor positivo dará um quociente positivo.

3.ª Fórma. Supponhamos que m seja igual a n, isto é, que os dois correios andem com igual velocidade, neste caso, o numero de horas, que é o valor da incognita, será infinito, porque sendo $m=n$, então $\frac{a}{m-n} = \frac{a}{0} = \infty$, isto é, será igual ao infinito como já demonstrámos nas secções **230** e **231**.

Nesta supposição dos valores do problema, a **solução é infinita**, e não póde ser outra, porque se os dois correios estão separados por uma certa distancia, e andam na mesma direcção, e com igual velocidade, é certo que nunca poderão ficar juntos, pois, por mais que caminhem, a mesma distancia os separará.

Em linguagem mathematica, diz-se que os dois correios ficarão juntos *a uma distancia infinita do ponto da partida*. Mas esta expressão quer simplesmente dizer em linguagem commum, que elles nunca se encontrarão, ou que é impossivel encontrarem-se. São desta natureza todos os casos que, em Algebra, apresentam uma solução infinita.

4.ª Fórma. Supponhamos ainda que a seja zero, isto quer dizer que não haja distancia alguma entre os dois correios. Neste caso, o numero de horas requerido será tambem zero, porque a solução $x = \frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{m-n}$, e nós já demonstramos que zero dividido por uma quantidade qualquer, é igual a zero (n.º **233**).

Ora este resultado é evidente na solução, porque se não ha distancia alguma entre os dois correios, é porque elles estão juntos, e se estão juntos, não ha necessidade de tempo algum para um alcançar o outro. Nesta supposição dos valores, a **solução é zero.**

5.ª Fórma. Supponhamos finalmente que a seja zero e m igual a n, neste caso, o numero de horas requerido será indeterminado, porque a solução $\frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{0}$, symbolo que significa uma quantidade indeterminada, como já demonstrámos (n.º **236**).

Este resultado é evidente das condições que suppomos no problema, porque se os dois correios estão juntos e caminham com igual velocidade, é certo que, desde a partida, elles estarão juntos na primeira hora de caminho, na segunda, na terceira e em todo o tempo que caminharem nestas condições; por isso, qualquer numero de horas satisfará as condições do problema. Esta **solução é indeterminada.**

Vemos pois, que, attribuindo-se ás quantidades generalizadas a, m e n destes problemas valores particulares ou imaginarios, as fórmas da solução teem um resultado completamente distincto.

246. Para fazermos apparecer a solução indeterminada com a fórma $0=0$, vamos resolver o seguinte problema:

Tres pessoas A, B e C teem as seguintes idades: a idade de B é 6 annos menor do que a de A, e 4 annos maior do que a de C; e $\frac{1}{3}$ da idade de A mais $\frac{1}{4}$ da idade de C são iguaes a $\frac{7}{12}$ da idade de B e mais 1. Quaes são as idades destas pessoas?

Solução. Seja x a idade de A, $x-6$ a idade de B, e $x-6-4$ a idade de C.

$$\text{Então,}\quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(x-10) = \frac{7}{12}(x-6)+1,$$

$$\text{ou}\quad \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{10}{4} = \frac{7x}{12} - \frac{42}{12} + 1,$$

$$\text{inteirando}\quad 4x+3x-30 = 7x-42+12,$$

$$\text{transpondo}\quad 4x+3x-7x = -42+12+30,$$

$$\text{reduzindo}\quad 0=0.$$

O resultado $0=0$ mostra que a solução é indeterminada, e por isso qualquer numero satisfará as condições do problema. A expressão $\frac{1}{3}x$ quer dizer $\frac{1}{3}$ de x ou $\frac{x}{3}$.

Tomemos agora ao acaso o numero 20, para a idade de A, afim de vermos se elle satisfaz as condições do problema. A idade de A sendo 20 annos, a de B será $20-6=14$, e a de C $20-6-4=10$. As condições do problema são as seguintes:

$$\frac{1}{3}\text{ de } 20 + \frac{1}{4}\text{ de } 10 = \frac{7}{12}\text{ de } 14+1, \text{ ou}$$

$$\frac{20}{3} + \frac{10}{4} = \frac{98}{12}+1 \text{ ou } \frac{110}{12} = \frac{110}{12}.$$

Esta identidade mostra que o numero 20 satisfaz as condições do problema, e o mesmo succederá com qualquer outro numero.

DESIGUALDADE

247. Desigualdade algebrica é uma expressão que apresenta duas quantidades unidas pelo signal $>$ ou $<$ sendo uma dellas maior do que a outra, como:

(1.º Membro) (2.º Membro)

$$3+5 > 7-2$$

A desigualdade significa o inverso da igualdade. O termo ou termos que vão antes do signal, formam o primeiro membro da desigualdade, e os que vão depois, formam o segundo membro.

Na discussão dos problemas, muitas vezes é necessario comparar quantidades desiguaes para determinar os valores das quantidades desconhecidas, e estabelecer certas relações entre ellas.

248. Duas ou mais desigualdades estão no mesmo sentido, quando em todas ellas o primeiro membro é maior do que o segundo, ou quando em todas o segundo membro é maior do que o primeiro. Assim, as desigualdades $15 > 12$, $7 > 5$ e $4 > 1$ estão no mesmo sentido; e as desigualdades $5 < 8$, $9 < 11$ e $13 < 15$ estão tambem no mesmo sentido.

Duas desigualdades estão em **sentido contrario**, quando em uma dellas o primeiro membro é maior do que o segundo, e na outra, o segundo membro é maior do que o primeiro, como $15 > 12$ e $11 < 14$.

249. Para notarmos com mais clareza a differença entre os valores positivos e negativos expressos em uma desigualdade, observaremos a seguinte escala descendente que mostra a relação de valores dependentes do signal que effectua uma quantidade.

(Numeros positivos) (Numeros negativos)

$$+5,\ +4,\ +3,\ +2,\ +1,\quad 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5.$$

Visto que esta escala é descendente, notamos nella os tres seguintes factos que servem de base para as operações da desigualdade:

1.º *Qualquer numero positivo é maior do que zero.*
2.º *Zero é maior do que qualquer numero negativo.*
3.º *Entre dois numeros negativos, o maior é o que tem o valor numerico absoluto menor.*

Assim, $+1 > 0$, isto é, 1 positivo é maior do que zero.
$0 > -1$, isto é, zero é maior do que 1 negativo.
$-2 > -5$, isto é, 2 negativo é maior do que 5 negativo.

250. Quasi todas as alterações que effectuamos nas equações do primeiro grau, podem ser tambem operadas nas desigualdades, como vamos reconhecer nos seguintes principios:

1.º *Se juntarmos o mesmo numero ou a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, ou se de ambos os membros subtrahirmos o mesmo numero, a desigualdade não ficará alterada.*

Illustração. Se a cada membro da desigualdade $7 > 5$ addicionarmos 4, teremos a expressão $7+4 > 5+4$ que simplificada dá $11 > 9$; em ambos os casos, a differença é 2. Se subtrahirmos 4, teremos $7-4 > 5-4$ ou $3 > 1$ ficando a mesma differença.

Isto é intuitivo, porque se a cada um dos membros da desigualdade $a > b$ addicionarmos ou subtrahirmos a quantidade m, teremos $a+m > b+m$ ou $a-m > b-m$; ora a desigualdade entre a e b ficará a mesma, desde que ambos os membros tenham o mesmo augmento ou diminuição.

251. 2.º *Qualquer termo de um membro póde ser mudado para o outro membro, trocando-se-lhe o signal.*

Illustração. Estabelecendo a desigualdade $a^2+b^2 > 2ab+c^2$, accrescentando $-2ab$ a ambos os membros, temos $a^2+b^2-2ab > 2ab-2ab+c^2$; ou, reduzindo os termos, $a^2-2ab+b^2 > c^2$.

Vemos aqui o termo $-2ab$ mudado de um membro para o outro, ficando com o signal trocado.

252. 3.º *Se os dois membros de uma desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo numero positivo, a desigualdade continuará no mesmo sentido.*

Illustração. Se multiplicarmos por 3, ambos os membros da desigualdade $8 > 4$, teremos $8\times3 > 4\times3$ ou $24 > 12$; em ambos os casos, o numero maior contém duas vezes o menor. Se os dividirmos por 2, teremos $8\div2 > 4\div2$ ou $4 > 2$, tambem contendo o numero maior duas vezes o menor.

Mas se os dois membros da desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo numero negativo, a desigualdade resultante ficará em sentido contrario.

Illustração. Se multiplicarmos ambos os membros de $8 > 5$ por -2, teremos $8\times-2 > 5\times-2$ que reduzido dá $-16 < -10$, pois, como já vimos entre duas quantidades negativas a maior é a que tem o valor numerico menor. (**N. 256.**)

O mesmo resultado se observa na divisão.

253. 4.º *Se mudarmos os signaes de todos os termos de ambos os membros de uma desigualdade, ella ficará com o sentido contrario, porque esta mudança dá o mesmo resultado que multiplicar todos os seus termos por* -1.

Illustração. Assim, na desigualdade $8+3-2>2+3-1$, mudando o signal dos termos, temos $-8-3+2<-2-3+1$, reduzindo os termos, temos $-9<-4$.

Na desigualdade que serve de exemplo, é maior o primeiro membro, mas sendo trocados os signaes, fica maior o segundo membro, e por isso fica em sentido contrario, pois -4 é maior do que -9.

254. 5.° *Se duas desigualdades formadas no mesmo sentido forem sommadas membro a membro correspondente, a desigualdade resultante não mudará de sentido.*

Illustração. A somma das desigualdades $7>3$ e $4>1$ é $7+4>3+1$ ou $11>4$. Este enunciado é intuitivo, porque os membros da esquerda, sendo maiores do que os da direita, a somma daquelles será tambem maior do que a destes.

Mas se nas duas desigualdades, em vez da addição, operarmos a subtracção, o resultado póde ser no mesmo sentido, no sentido contrario ou resultar uma igualdade.

Illustração. Os tres exemplos seguintes de subtracção mostram este principio:

(Mesmo sentido)	(Sentido contrario)	Igualdade
$7>3$	$10>9$	$10>9$
$4>1$	$8>3$	$8>7$
$3>2$	$2<6$	$2=2$

Generalizando este principio podemos estabelecer que de $a>b$ subtrahindo $c>d$, o resultado, segundo os valores particulares de a, b, c e d, poderá ser $a-c>b-d$, $a-c<b-d$ ou $a-c=b-d$.

255. 6.° *Se os dois membros de uma desigualdade, sendo positivos, forem elevados á mesma potencia, ou se delles se extrahir a mesma raiz, a desigualdade resultante ficará no mesmo sentido.*

Illustração. As desigualdades $3>2$, e $3^2>2^2$ que é $9>4$, estão no mesmo sentido. Do mesmo, modo, $25>16$, e $\sqrt{25}>\sqrt{16}$ que é $5>4$ estão tambem no mesmo sentido.

E' claro que, se o primeiro membro for maior do que o segundo, o seu quadrado será tambem maior do que o segundo, e o mesmo succederá com as suas raizes. Mas se os dois membros não forem positivos, a elevação de potencias e a extracção de raizes nem sempre darão uma desigualdade no mesmo sentido.

256. Resolver uma desigualdade é determinar o limite superior ou inferior do valor que a incognita póde ter para satisfazer as condições apresentadas em um problema.

Em geral resolve-se uma desigualdade do mesmo modo que uma equação do primeiro grau, observando os principios que acabámos de expôr.

I Problema. Achar um numero cujo triplo menos 4, seja maior do que o mesmo numero e mais 6.

Solução. Seja x o numero requerido, e pelas condições do problema,

temos a seguinte desigualdade........ $3x-4>x+6$,
transpondo os termos, temos.......... $3x-x>6+4$,
reduzindo os termos e dividindo...... $x>5$.

Sendo o numero maior do que 5, póde ser qualquer inteiro ou mixto superior a 5, visto não ter outro limite.

257. Se um problema de desigualdade offerecer duas condições, em uma, a incognita apresentará o limite superior, e em outra, o limite inferior.

II Problema. Cinco vezes certo numero e mais 4 é maior do que duas vezes esse numero e mais 19; e cinco vezes esse numero menos 4 é menor que quatro vezes o numero e mais 4. Requer-se o numero.

Solução. Seja x o numero requerido no problema.

A primeira condição é.................... $5x+4>2x+19$ (1ª)
A segunda condição é..................... $5x-4<4x+4$ (2ª)

	(1ª)	(2ª)
Transpondo os termos em ambas	$5x-2x>19-4$,	$5x-4x<4+4$,
reduzindo os termos............	$3x>15$,	$x<8$.
dividindo a (1ª) por 3..........	$x>5$.	

Desde que x deve ser um numero maior do que 5, e menor do que 8, segue-se que esse numero póde ser 6, 7, ou qualquer outro numero mixto comtanto que fique entre 5 e 8.

III Problema. Demonstrar que a somma dos quadrados de duas quantidades desiguaes é maior do que duas vezes o producto dessas quantidades, isto é, que $a^2+b^2>2ab$.

Demonstração. Desde que o quadrado de um numero, quer esse numero seja positivo ou negativo, é sempre uma quantidade positiva, como vimos na regra dos signaes; e como qualquer numero positivo é maior do que zero (n.° **249**), segue-se que $a^2-2ab+b^2$ que é o quadrado de $(a-b)$, é maior do que zero.

Portanto................................ $a^2-2ab+b^2>0$,
juntando $2ab$ a ambos os membros.... $a^2-2ab+2ab+b^2>0+2ab$,
reduzindo os termos.................. $a^2+b^2>2ab$.

Fica, portanto, demonstrado que a^2+b^2 é maior do que $2ab$.

Regra. *Para resolvermos uma desigualdade, faremos todas as transformações necessarias para achar o valor mais approximado da incognita, operando como nas equações do primeiro grau.*

Resolver os seguintes problemas:

4. Se $4x-7<2x+3$, e se $3x+1>13-x$, que valor se póde dar a x? Resp. $5>x>3$

5. Achar o limite de x na desigualdade $7x-3>32$. Resp. $x>5$.

6. Achar o limite de x em $5+\frac{x}{3}<8+\frac{x}{4}$. Resp. $x<36$.

7. O dobro de certo numero e mais 7 é menor que 19; e o seu triplo menos 5 é menor que 13. Requer-se o numero.
Resp. ?

8. Determinar quanto a somma a^2+b^2 excede ao producto $2ab$.
Resp. $(a-b)^2$.

FORMAÇÃO DAS POTENCIAS

258. Quando definimos os termos algebricos (**ns. 24 a 29**) démos uma exposição resumida dos symbolos que representam as diversas potencias e raizes, para os discipulos poderem lêr estas expressões, e effectuar com ellas as quatro operações algebricas sobre inteiros e fracções. Agora, porém, que temos de entrar na formação dessas potencias e extracção das suas raizes, precisamos desenvolver mais este ponto.

259. A palavra **potencia** é usada em Algebra para significar o producto de uma quantidade multiplicada por si mesma um certo numero de vezes.

Qualquer quantidade é geralmente considerada como a primeira potencia de si mesma; mas rigorosamente fallando, ella não é potencia, mas sim raiz ou factor do qual se podem formar potencias; assim x, tomado uma só vez como factor, não dá producto nem potencia, porque $x^1=x$.

260. A segunda potencia ou o **quadrado** de uma quantidade é o producto dessa quantidade por si mesma. Assim, a segunda potencia de x é x^2 porque $x\times x=x^2$.

261. A terceira potencia ou o **cubo** de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada tres vezes como factor. Assim, a terceira potencia de y é y^3, porque $y\times y\times y=y^3$.

262. A quarta potencia de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada quatro vezes como factor. Assim, a quarta potencia de a é a^4, porque $a\times a\times a\times a=a^4$. E do mesmo modo, seguem as demais potencias.

A formação das potencias ou **Potenciação** é a operação que tem por fim achar qualquer potencia de uma quantidade.

263. Chama-se **expoente** o numero escripto no alto direito de uma quantidade para mostrar o grau da sua potencia, isto é, quantas vezes elle tem de ser tomado como factor. Assim,

A 1.ª potencia de 3 é 3 ou 3^1.
A 2.ª potencia de 3 é $3\times3=3^2=9$.
A 3.ª potencia de 3 é $3\times3\times3=3^3=27$.
A 4.ª potencia de 3 é $3\times3\times3\times3=3^4=81$.

A 2.ª potencia de x é $x\times x=x^2$.
A 3.ª potencia de x é $x\times x\times x=x^3$.
A 4.ª potencia de x é $x\times x\times x\times x=x^4$, etc.

Daqui se vê que 3 é raiz de 9, 27, 81, etc.; e x é raiz de x^2, x^3, x^4, etc.

Elevação de um monomio a qualquer potencia

264. Problema. Qual é a terceira potencia de $2ab^2$?

Solução. Segundo a definição, a terceira potencia de $2ab^2$ deve ser o producto desta quantidade tomada tres vezes como factor. Então,

$$(2ab^2)^3=2ab^2\times2ab^2\times2ab^2=2\times2\times2\times aaa\times b^2b^2b^2 \text{ ou}$$
$$=2^3\times a^{1+1+1}\times b^{2+2+2}=8a^3b^6.$$

Neste exemplo vê-se que o coefficiente 2 se eleva á terceira potencia e fica 8, e ás lettras a e b^2 se lhes dá tres vezes os seus expoentes ou se multiplicam estes por 3, e ficam a^3b^6.

265. Nos signaes das potencias ha dois casos a considerar, que são:

1.º Quando uma quantidade é positiva.
2.º Quando uma quantidade é negativa.

266. Primeiro caso. Quando uma quantidade é positiva, dará todas as suas potencias positivas, porque, seja qual fôr o numero de vezes que ella entre como factor, o producto será sempre positivo; pois + multiplicado por + dá +. Assim,

$$(+a)\times(+a)=+a^2, \text{ e tambem } (+a)\times(+a)\times(+a)=+a^3.$$

267. Segundo caso. Quando uma quantidade é negativa, temos os seguintes resultados:

$(-a)\times(-a)=+a^2$; a 2.ª potencia é positiva.
$(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3$; a 3.ª potencia é negativa.
$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=+a^4$; a 4.ª potencia é positiva.
$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^5$; a 5.ª potencia é negativa.

Daqui concluimos que o producto de um numero **par** de factores negativos é positivo; e o producto de um numero **impar** de factores negativos é negativo. Por isso as potencias pares de uma quantidade negativa são todas positivas, e as potencias impares são negativas.

Regra. *Para se elevar um monomio a qualquer potencia, eleva-se o coefficiente numeral ao grau requerido, e multiplica-se o expoente de cada lettra pelo expoente da potencia. E, se o monomio fôr positivo, todas as potencias serão positivas; mas se fôr negativo, todas as potencias pares serão positivas, e todas as potencias impares serão negativas.*

	Respostas
1. Achar o quadrado de $3ax^2y^3$.	$9a^2x^4y^6$.
2. Achar o quadrado de $5b^2c^3$.	$25b^4c^6$.
3. Achar o cubo de $2x^2y^3$.	$8x^6y^9$.
4. Achar o quadrado de $-ab^2c$.	$a^2b^4c^2$.
5. Achar o cubo de $-abc^2$.	$-a^3b^3c^6$.
6. Achar a quarta potencia de $3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
7. Achar a quarta potencia de $-3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
8. Achar a quinta potencia de ab^3cd^2.	$a^5b^{15}c^5d^{10}$.
9. Achar a quinta potencia de $-ab^3c^2$.	$-a^5b^{15}c^{10}$.
10. Achar a setima potencia de $-m^2n^3$.	?
11. Achar o cubo de $-3a^4$.	?
12. Achar a quarta potencia de $7a^2x^3$.	?

Elevação de um polynomio a qualquer potencia

268. Problema. Qual é o quadrado de $ax+cy$?

Solução. Multiplicando $ax+cy$ por si mesmo, ou seguindo o enunciado do 1.º theorema, obtemos o seu quadrado, como se vê na expressão ao lado.

$$(ax+cy)\ (ax+cy)=a^2x^2+2acxy+c^2y^2.$$

Regra. *Para se elevar um polymonio a qualquer potencia, acha-se o producto dessa quantidade, tomada como factor tantas vezes quantas forem as unidades do expoente da potencia requerida.*

1. Achar o quadrado de $1-x$.	$1-2x+x^2$.
2. Achar o quadrado de $x+1$.	x^2+2x+1.
3. Achar o quadrado de $a-cy$.	$a^2-2acy+c^2y^2$.
4. Achar o quadrado de $2x^2-3y^2$.	$4x^4-12x^2y^2+9y^4$.
5. Achar o cubo de $a+x$.	$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$.
6. Achar o cubo de $x-y$.	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
7. Achar o cubo de $2x-1$.	$8x^3-12x^2+6x-1$.
8. Achar o valor de $(c-x)^4$.	$c^4-4c^3x+6c^2x^2-4cx^3+x^4$.
9. Achar o quadrado de $a+b+c$.	?
10. Achar a quarta potencia de $b+6$.	?

Elevar uma fracção a qualquer potencia

269. Problema. Qual é o quadrado de $\frac{a+b}{a-b}$?

Solução. Multiplicando a fracção por si mesma, obtemos o seu quadrado.

$$\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

Regra. *Elevam-se os dois termos da fracção á potencia requerida.*

1. Achar o quadrado de $\frac{2x}{3y}$.	Resp. $\frac{4x^2}{9y^2}$
2. Achar o quadrado de $\frac{ac^2}{x^2y}$.	» $\frac{a^2c^4}{x^4y^2}$
3. Achar o cubo de $-\frac{2a}{x^2y^2}$.	» $-\frac{8a^3}{x^6y^6}$
4. Achar o quadrado de $\frac{2x^2}{3y}$.	» $\frac{4x^4}{9y^2}$
5. Achar o quadrado de $\frac{x-2}{x+3}$.	» $\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}$.

Binomio de Newton

270. Todos os binomios pódem ser elevados a qualquer potencia por meio de multiplicações successivas, mas este processo, além de ser muito moroso, está sujeito a muitos erros. O grande mathematico inglez Isaac Newton descobriu um processo facilimo de elevar um binomio a qualquer potencia, sem esse trabalho fastidioso, nem o perigo de errar. A esse processo admiravel deu-se o nome de **Binomio de Newton.**

Para comprehendermos a base em que assentam as leis desta fórmula importante, elevemos os binomios $(a+b)$ e $(a-b)$ até a quinta potencia, supprimindo as diversas multiplicações para não tomarem aqui muito espaço:

2.ª Potencia. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
3.ª Potencia. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4.ª Potencia. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
5.ª Potencia. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.
2.ª Potencia. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3.ª Potencia. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
4.ª Potencia. $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
5.ª Potencia. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

271. Nas diversas potencias destes dois binomios, temos de analysar quatro pontos, que são:

1.º O numero de termos.
2.º Os signaes dos termos.
3.º Os expoentes dos termos.
4.º Os coefficientes dos termos.

Analysemos cada um destes pontos separadamente.

Numero dos termos

272. Examinando o numero de termos de cada potencia dos dois binomios, vemos que a segunda potencia tem tres termos; a terceira potencia tem quatro termos, a quarta potencia tem cinco, a quinta potencia tem seis; daqui inferimos que o *numero dos termos de qualquer potencia de um binomio, é 1 mais que o expoente da potencia.*

Signaes dos termos

273. Examinando-se os signaes, fica evidente que *quando ambos os termos do binomio são positivos, todos os termos das potencias são positivos.*

Quando o primeiro termo é positivo e o segundo negativo, todos os termos **impares** *são positivos e os* **pares** *são negativos.*

Nota. Termos impares são o 1.º, 3.º, 5.º, etc.; e termos pares são o 2.º, 4.º, 6.º, etc., começando pela esquerda.

Expoentes dos termos

274. Se omittirmos os coefficientes da quinta potencia de $a-b$ e $a+b$, a parte litteral será

$(a+b)^5$ .... $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.
$(a-b)^5$ .... $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$.

Examinando estas e outras potencias de $a+b$ e $a-b$, vemos que os expoentes das lettras são regidos pelas seguintes leis:

1.ª *O expoente da lettra no primeiro termo é o mesmo que o da potencia do binomio; e o expoente desta lettra nos outros termos vai diminuindo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo que já não tem mais esta lettra.*

2.º *O expoente da segunda lettra é 1 no segundo termo da potencia, e os outros expoentes desta lettra vão crescendo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo, no qual o expoente é o mesmo que o da potencia do binomio.*

3.º *O polynomio resultante é homogeneo e do mesmo grau da potencia do binomio.*

Nota. O discipulo poderá agora empregar estes principios escrevendo as differentes potencias dos binomios, omittindo os coefficientes como se vê nos exemplos seguintes:

$(x+y)^3$ .... $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
$(x-y)^4$ .... $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
$(x+y)^5$ .... $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.
$(x-y)^5$?
$(x+y)^6$?
$(x-y)^7$?
$(x+y)^7$?

Coefficientes dos termos

275. Examinando os coefficientes das diversas potencias de $a+b$ e $a-b$, vemos que

O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido e o coefficiente do segundo termo é o mesmo que o expoente da potencia do binomio.

A lei que rege os coefficientes dos termos seguintes póde ser assim expressa:

Se o coefficiente de qualquer termo fôr multiplicado pelo expoente da primeira lettra, e o producto dividido pelo numero da ordem desse termo, o quociente será o coefficiente do termo seguinte.

Para esta lei ficar bem comprehendida, vamos illustral-a escrevendo a sexta potencia de $a+b$, pondo sobre cada termo o respectivo coefficiente, e debaixo o numero de sua ordem para facilitar a explicação e o calculo.

1		6		15		20		15		6		1
a^6	+	a^5b	+	a^4b^2	+	a^3b^3	+	a^2b^4	+	ab^5	+	b^6,
1.º		2.º,		3.º,		4.º,		5.º,		6.º,		7.º.

Para comprehendermos esta illustração devemos notar que, em uma potencia ordenada, cada termo tem a sua ordem ou lugar. Assim o primeiro termo da esquerda é o termo da 1.ª ordem; o segundo termo é da 2.ª ordem; o terceiro é da 3.ª ordem, e assim por diante; de modo que os numeros 1.º, 2.º, 3.º, etc., mostram a ordem ou o lugar em que o termo está escripto na potencia.

O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido. O coefficiente do segundo termo é o expoente do primeiro termo, que é 6. Nos dados do segundo termo temos de achar o coefficiente do terceiro termo. Então multiplicando o coefficiente que é 6, pelo expoente de a que é 5, e dividindo o producto pelo numero de sua ordem que é 2, temos $\frac{6\times5}{2}=15$ que é o coefficiente do terceiro termo. Nos dados do terceiro termo temos de achar o coefficiente do quarto termo: multiplicando o coefficiente 15 pelo expoente de a que é 4, dividindo o producto pelo numero de sua ordem que é 3, temos $\frac{15\times4}{3}=20$ que é o coefficiente do quarto termo.

Proseguindo assim, vemos que os coefficientes de todos os termos são:

$$1,\quad 6,\quad \frac{6\times5}{2},\quad \frac{15\times4}{3},\quad \frac{20\times3}{4},\quad \frac{15\times2}{5},\quad \frac{6\times1}{6}.$$

ou 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Estes coefficientes juntos aos respectivos termos dão:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

276. Segundo a lei que acabamos de illustrar, vemos que os coefficientes

de $(a+b)^2$ são 1, 2, 1.
de $(a+b)^3$ são 1, 3, 3, 1.
de $(a+b)^4$ são 1, 4, 6, 4, 1.
de $(a+b)^5$ são 1, 5, 10, 10, 5, 1.
de $(a+b)^6$ são 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Devemos notar aqui que os coefficientes crescem até ao meio da potencia, e depois decrescem na mesma razão; por isso basta sómente calcular os coefficientes até ao meio mais 1 da potencia ou até o meio da potencia mais 1, e depois repetir os mesmos numeros em ordem inversa. Assim, si a potencia fôr par, 6 por exemplo, devemos calcular até o 4.º $(\frac{6}{2}+1)$ termo; si a potencia fôr impar, 11 por exemplo, basta-nos calcular 6 termos $\frac{11+1}{2}$.

277. Qualquer potencia de 1 é sempre 1; assim, $1\times1=1$, $1\times1\times1=1$. Quando 1 é factor, não influe sobre a quantidade por que se multiplica, assim, $1\times x=x$, $ab\times1=ab$.

Potenciar as seguintes quantidades por meio de Binomio de Newton:

1. Elevar $x+y$ á terceira potencia. Resp. ?
2. Elevar $x-y$ á quarta potencia. » ?
3. Elevar $m+n$ á quinta potencia. » ?
4. Elevar $x-z$ á sexta potencia. » ?
5. Qual é a setima potencia de $a+b$? » ?
6. Achar a terceira potencia de $x+1$. » ?
7. Qual é a quarta potencia de $b-1$. » ?
8. Elevar $1-a$ á quinta potencia. » ?

278. Quando os termos de um binomio teem coefficientes e expoentes, abrevia-se a potenciação, operando-se com um binomio simples, e depois substituindo-se os seus diversos termos pelos valores correspondentes do binomio dado.

Exemplo. Qual é a terceira potencia de $2x-ac^2$?

Solução. Se substituirmos $2x$ por m, e ac^2 por n teremos $(2x-ac^2)=(m-n)$, binomio simples. Então $(m-n)^3=m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$. Precisamos agora comprehender que

sendo $m=2x$,	sendo $n=ac^2$,
então $m^2=4x^2$,	então $n^2=a^2c^4$,
e $m^3=8x^3$;	e $n^3=a^3c^6$.

Se substituirmos agora as diversas potencias de m e n por seus respectivos valores nas potencias de $2x$ e ac^2, teremos:

1.º Termo $m^3=$ . . . . $8x^3$
2.º Termo $3m^2n=3(4x^2\times ac^2)=12ac^2x^2$
3.º Termo $3mn^2=3(2x\times a^2c^4)=6a^2c^4x$
4.º Termo $n^3=$ . . . . a^3c^6.

Ordenando os termos desta terceira potencia, temos

$$(2x-ac^2)^3=8x^3-12ac^2x^2+6a^2c^4x-a^3c^6.$$

Potenciar deste modo os seguintes exemplos:

1. Qual é a terceira potencia de $3a^2-5b$?
Resp. $27a^6-135a^4b+225a^2b^2-125b^3$.
2. Qual é a terceira potencia de $2ax+by$?
Resp. $8a^3x^3+12a^2x^2by+6axb^2y^2+b^3y^3$.
3. Qual é a quinta potencia de x^2+3y^2?
Resp. $x^{10}+15x^8y^2+90x^6y^4+270x^4y^6+405x^2y^8+243y^{10}$.

279. Quando um dos termos do binomio é uma fracção, podemos de dois modos achar o quadrado do binomio: multiplicando a fracção ou transformando o binomio em uma fracção impropria.

(1.º Modo)

$$\begin{array}{r} x+\frac{1}{2} \\ x+\frac{1}{2} \\ \hline x^2+\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \hline x^2+x+\frac{1}{4}. \end{array}$$

(2.º Modo)

$$x+\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{2}$$

$$\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2=\frac{4x^2+4x+1}{4}$$

ou $x^2+x+\frac{1}{4}$.

Solução. Multiplicando-se o binomio por si mesmo, o quadrado é $x^2+x+\frac{1}{4}$. Reduzindo o binomio a uma fracção impropria, e quadrando a fracção achamos o mesmo resultado.

Outros modos de formar um quadrado

280. Como já vimos anteriormente o modo directo e simples de achar o quadrado de um numero é multiplicar esse numero por si; assim o quadrado de 12 é $12\times12=144$. Ha porém outros modos de formar o quadrado de um numero, os quaes precisamos tambem conhecer.

281. O quadrado de um numero superior a 10 póde ser formado pela aggregação das diversas partes de que é formado. O numero 11 póde ser decomposto em duas quantidades que são 10+1; o numero 12, em 10+2; o numero 13, em 10+3, e assim por diante.

Ora como «*o quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais duas vezes o producto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda*» **secção 93**, segue-se que se decompuzermos o numero 12 em 10+2, e aggregarmos as diversas partes mencionadas no theorema acima, teremos o quadrado de 12. Verifiquemos este caso:

Quadrado da primeira quantidade	10×10	=100
Duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda	2(10×2)	= 40
Quadrado da segunda quantidade	2×2	= 4
Prova......	12×12	=144

Se o numero for composto de tres algarismos, como por exemplo 125, poderemos decompol-o em 120+5, e depois formar o seu quadrado do mesmo modo.

Exemplo:

Quadrado da primeira quantidade	120×120=14400
Duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda	2(120×5) = 1200
Quadrado da segunda quantidade	5×5 = 25
Prova.........	125×125=15625

282. Podemos tambem achar o quadrado de um numero por meio do quadrado de um numero inferior.

A differença entre os quadrados de dois numeros inteiros e consecutivos é igual ao dobro do menor mais uma unidade. Assim 8 e 9 são numeros consecutivos; os seus quadrados são 8×8=64 e 9×9=81; a differença entre estes quadrados é 81—64=17. Ora 17 é igual ao dobro de 8, que é o numero menor, e mais uma unidade ou 1.

Demonstração algebrica. Seja a o numero menor, e $(a+1)$ o numero maior. Quadrando estas duas quantidades e subtrahindo a menor da maior, teremos $2a+1$ isto é, *o dobro da quantidade menor mais 1*.

$$(a+1)^2=a^2+2a+1$$
$$a^2=a^2$$
$$\overline{\quad 2a+1}$$

Com o quadrado de um numero qualquer podemos, pois, formar os quadrados dos numeros seguintes sómente por meio de simples addições.

Problema. Sendo 625 o quadrado de 25, qual é o quadrado de 26 e de 27?

Solução. Sendo 625 o quadrado de 25, o quadrado de 26 é 625 mais 50, que é o dobro de 25, e mais 1, isto é, 676. O quadrado de 27 é 676, mais 52 que é o dobro de 26, e mais 1, isto é, 676+52+1=729; e assim por diante.

$$\begin{array}{r} 625 \\ 50 \\ 1 \\ \hline 676 \end{array}$$

283. Daqui deduzimos o seguinte corollario:

Se juntarmos a um quadrado perfeito o dobro da sua raiz e mais 1, obteremos o quadrado perfeito immediato superior.

Podemos portanto formar facilmente uma serie de quadrados perfeitos, addicionados a cada quadrado o dobro da sua raiz e mais 1. Assim,

100............... é o quadrado de 10;
100+10+10+1=121 é o quadrado de 11;
121+11+11+1=144 é o quadrado de 12;
144+12+12+1=169 é o quadrado de 13;
169+13+13+1=196 é o quadrado de 14;
196+14+14+1=225 é o quadrado de 15; etc.

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA

284. **A raiz quadrada** de uma quantidade é a quantidade que elevada ao quadrado reproduz a quantidade dada. Assim a raiz quadrada de 25 é 5, porque 5×5=25; a raiz quadrada de x^2 é x, porque $x \times x = x^2$.

285. **A raiz cubica** de uma quantidade é outra quantidade que elevada ao cubo reproduz a quantidade dada. Assim a raiz cubica de 27 é 3, porque 3×3×3=27; a raiz cubica de x^3 é x porque $x \times x \times x = x^3$.

Nota. As palavras potencias e raizes são termos correlativos. Se uma quantidade é uma potencia de outra, a ultima é raiz da primeira. Assim, a^3 é o cubo de a, e a é a raiz cubica de a^3.

286. Extrahir a raiz m de um numero é procurar o numero que elevado á potencia m reproduz o numero dado.

Extrair a raiz quadrada de uma quantidade é achar o factor que, multiplicado por si, dê essa quantidade.

Nota. De tres modos podemos decompôr uma quantidade, a saber: pela subtracção, pela divisão e pela extracção das raizes.

Pela *subtracção*, uma quantidade é separada em duas partes que sommadas dão essa quantidade.

Pela *divisão*, uma quantidade é decomposta em dois factores que multiplicados produzem essa quantidade.

Pela *extracção das raizes*, uma potencia é decomposta em factores iguaes que, multiplicados entre si, produzem essa potencia.

287. Em Algebra, as raizes exprimem-se de dois modos, a saber:

1.° Pelo signal radical.
2.° Pelo expoente fraccionario.

288. Primeiro modo. O signal radical é a figura $\sqrt{}$ que se escreve sobre uma quantidade, para mostrar que ella deve ser tomada no valor da raiz indicada pelo indice.

289. Indice da raiz é o numero escripto no angulo do signal radical para mostrar o seu grau. Assim,

$\sqrt[2]{16}=4$ lê-se: A raiz quadrada de 16 é igual a 4.
$\sqrt[3]{x^3}=x$ lê-se: A raiz cubica de x^3 é igual a x.
$\sqrt[4]{625}=5$ lê-se: A quarta raiz de 625 é igual a 5.

Nestes exemplos, os algarismos 2, 3 e 4 são os indices que mostram os graus das raizes.

290. Segundo modo. Exprime-se tambem a raiz com um expoente fraccionario, dando ao numerador o grau da potencia, e ao denominador o grau da raiz. Assim, $a^{\frac{1}{2}}$ mostra que da quantidade a^1 ou a devemos extrahir a raiz quadrada. Esta expressão é igual a $\sqrt[2]{a}$. Tambem $x^{\frac{2}{3}}$ mostra que de x^2 devemos extrahir a raiz cubica. Esta expressão é igual a $\sqrt[3]{x^2}$.

O valor de uma quantidade não ficará alterado, se trocarmos o expoente fraccionario por outro de igual valor. Assim, $a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{4}}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{5}{10}}$ etc.

291. Quando um numero é composto de dois factores e iguaes, chama-se **quadrado perfeito.** Assim, 9 é quadrado perfeito, porque é composto de 3×3; 16 é quadrado perfeito, porque é composto de 4×4; da mesma fórma $\frac{1}{4}$ é quadrado pois é igual a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

292. Os numeros que não são quadrados perfeitos, só podem ter uma raiz quadrada approximada, composta de um numero inteiro e uma fracção. Assim, a raiz quadrada de 10 é 3, 162277.., isto é, 3 inteiros e uma fracção decimal que, por mais approximada que seja, nunca esta raiz, multiplicada por si, produzirá exactamente o numero 10.

A raiz quadrada de um numero que não é quadrado perfeito só póde ser obtida approximadamente.

293. Os quadrados dos numeros inteiros, desde 1 até 100, são os seguintes:

Quadrados perfeitos:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Raizes quadradas :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

Nesta tabella vemos que a raiz quadrada de 1 é 1, e que todos os quadrados, desde 1 até 100 exclusive, teem a raiz quadrada com um só algarismo; e por isso concluimos que *todo quadrado que não tiver mais de dois algarismos, a sua raiz quadrada terá um só algarismo.*

294. Quadrando agora as dez primeiras dezenas, temos os seguintes resultados:

10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,	100.
100,	400,	900,	1600,	2500,	3600,	4900,	6400,	8100,	10000.

Destes resultados vemos que todos os quadrados desde 100 até 1000 exclusive constam de tres ou quatro algarismos, e por isso concluimos que todo quadrado que contém mais de dois algarismos e não mais de quatro, terá a raiz quadrada com dois algarismos.

Do mesmo modo se póde tambem provar que o quadrado que contém mais de quatro algarismos e não mais de seis, terá a raiz quadrada com tres algarismos, e assim por diante.

Daqui formulamos o seguinte principio:

295. *Quando um numero contiver um ou dois algarismos, a sua raiz terá um só; quando contiver tres ou quatro, a raiz terá dois; quando contiver cinco ou seis, a raiz terá tres, e assim por diante.*

Nota. Quando um numero não for um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada terá além do numero inteiro uma fracção; mas os algarismos da fracção não entram nesta contagem.

296. Como já vimos na **secção 281,** qualquer numero de mais de um algarismo, póde ser decomposto em duas partes ou quantidades, sendo uma as dezenas e a outra as unidades. Assim o numero 23 póde ser decomposto em 2 dezenas e 3 unidades; o numero 256 póde ser decomposto em 25 dezenas e 6 unidades. De sorte que se representarmos as dezenas por d, e as unidades por u, qualquer numero poderá ser representado por $d+u$, e o seu quadrado por $d^2+2du+u^2$.

Ora, os dois ultimos termos ou parcellas deste quadrado, que são $2du+u^2$ tambem podem ser expressas deste modo: $(2d+u)u$, isto é, *duas vezes as dezenas mais as unidades multiplicadas pelas unidades.* Deste modo, a fórmula do quadrado póde tambem ser assim expressa: $(d+u)^2=d^2+(2d+u)u$.

Esta nova fórmula facilita a extracção da raiz quadrada, e póde ser traduzida do seguinte modo:

O quadrado de qualquer numero de mais de um algarismo é composto do quadrado das dezenas, mais a quantidade que contém duas vezes as dezenas, mais as unidades multiplicadas pelas unidades.

Assim, o quadrado de 23, que é igual a duas dezenas e 3 unidades, é o seguinte:

Quadrado de duas dezenas = ... $(20)^2=400$
(2 vezes as dezenas + 3 unidades) multiplicadas por 3. $=(40+3)\times3=129$
Prova. $23\times23=529$

297. Vamos agora operar no sentido inverso, isto é, extrahir a raiz quadrada de 529.

Problema. Qual é a raiz quadrada de 529?

Solução. Como o numero dado consta de tres algarismos, a sua raiz terá dois **(n.º 295).**

Desde que o quadrado de 2 dezenas é 400 e o quadrado de 3 dezenas é 900, é evidente que o maior quadrado perfeito contido em 500 é o quadrado de 2 dezenas $(20)^2$; o quadrado de 2 dezenas é 400; subtrahindo agora este quadrado de 529, o resto é 129. Portanto, 2 é o primeiro algarismo da raiz.

5 2 9	$20+3=23$
4 0 0	
1 2 9	$(40+3)\times3$
1 2 9	
0 0 0	

Ora, segundo a fórmula acima, o resto 129 contém duas vezes as dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades, isto é, $(2d+u)u$.

Multiplicando-se dezenas pelas unidades, o producto não póde ser inferior ás dezenas, e por isso o algarismo 9 não deve fazer parte do dobro das dezenas multiplicadas pelas unidades. Então, se dividirmos 129 pelo dobro das dezenas (40), o quociente será o algarismo que representa as unidades. Dividindo então 120 por 40, temos o quociente 3 que é o numero das unidades, e por conseguinte o segundo algarismo da raiz.

Este algarismo junto ao dobro das dezenas, dá $40+3=43$; multiplicando agora 43 por 3, temos o producto 129, que é o dobro das dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades $(2d+u)u$. Como subtrahindo este producto do resto do quadrado nada resta, segue-se que 23 é a raiz quadrada exacta de 529.

Quando se extrahe a raiz quadrada, é costume supprimirem-se as cifras no quadrado das dezenas, e operar-se o processo como no modelo que está ao lado.

5 2 9	23
4	
1 2 9	43×3
1 2 9	
0 0 0	

Modo pratico de extracção

Problema. Qual é a raiz quadrada de 1 8 2 3 2 9?

Solução. O numero 1 8 2 3 2 9 tem 3 classes, e por isso a sua raiz terá tambem 3 algarismos.

Começa-se sempre a extracção pela primeira classe da esquerda. A raiz quadrada de 18 é 4. Escreve-se 4, como o primeiro algarismo da raiz, e como um divisor á direita do numero. Subtrahe-se de 18 o quadrado de 4, que é 16; o resto 2, com a classe seguinte, fórma o novo dividendo 223.

1 8 2 3 2 9	427 Raiz
1 6	
2 2 3	$82\times2=164$
1 6 4	
5 9 2 9	$847\times7=5929$
5 9 2 9	
0 0 0 0	

Dobra-se o divisor 4, que fica 8, e escreve-se abaixo como um divisor indicante (Chama-se divisor indicante, porquê elle indica o algarismo seguinte da raiz).

Para se achar o algarismo seguinte da raiz, separa-se em 223 o ultimo algarismo da direita e divide-se o numero resultante pelo divisor indicante, e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Nesta divisão despreza-se o resto.

Dividindo-se 22 por 8, o quociente é 2, e por isso o segundo algarismo da raiz é 2. Escreve-se 2 na raiz e tambem junto com o divisor indicante, que fica 82, e se torna divisor completo. Multiplica-se pelo segundo algarismo da raiz o divisor completo, e o producto 164 se subtrahe do dividendo 223; o resto 59, com a classe seguinte, fórma o novo dividendo 5929.

Para se achar o ultimo algarismo da raiz, desce-se o divisor 82, com o segundo algarismo dobrado, para ser um novo divisor indicante, e então fica 84. Divide-se o novo dividendo pelo divisor 84, e o quociente 7 será o ultimo algarismo da raiz. Escreve-se 7 na raiz e tambem junto com o divisor 84, ficando então 847, divisor completo, e multiplicando-se este divisor completo pelo ultimo algarismo da raiz, teremos o producto 5929 que se subtrae do dividendo. Esta subtracção não deixando resto, 182329 é um quadrado perfeito, e a sua raiz quadrada é 427.

Prova. $427\times427=182329$.

Regra. *I. Para se extrahir a raiz quadrada de um numero, divide-se este numero em classes de dois algarismos cada uma, começando pelas unidades.*

II. Acha-se o maior quadrado perfeito contido na ultima classe, e escreve-se a sua raiz ao lado direito, em fórma de divisor, e será este o primeiro algarismo da raiz. Subtrahe-se o quadrado perfeito daquella classe, e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

III. Dobra-se a parte da raiz achada, e escreve-se como um divisor indicante ao lado do dividendo; acha-se quantas vezes o divisor é contido no dividendo, excluindo deste o ultimo algarismo da direita, e esse numero junta-se ao primeiro algarismo da raiz e tambem ao divisor.

IV. Multiplica-se agora o divisor completo pelo numero achado, e o producto subtrahe-se do dividendo. O resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

V. Desce-se com o divisor o algarismo dobrado da direita, e continúa-se o processo como acima até todas as classes ficarem divididas.

Nota. Quando um divisor indicante é maior do que o respectivo dividendo, escreve-se uma cifra na raiz, outra no divisor e desce-se outra classe para o dividendo, e continua-se a operação. Se houver resto, depois de se achar a raiz da ultima classe, o numero será um quadrado imperfeito, e a sua raiz approximada será um numero fraccionario.

Para se achar a fracção da raiz, juntam-se classes de cifras ao resto, e escreve-se uma virgula decimal no fim da parte inteira da raiz, para se indicar que os algarismos que seguem são decimaes.

Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

1. $\sqrt{4225}=?$	Resp.	65.	5. $\sqrt{1444}=?$		?
2. $\sqrt{1521}=?$	»	39.	6. $\sqrt{2025}=?$		?
3. $\sqrt{7225}=?$	»	85.	7. $\sqrt{6241}=?$		?
4. $\sqrt{9409}=?$	»	97.	8. $\sqrt{4924}=?$		?

Extracção da raiz quadrada das fracções

298. Desde que o quadrado de uma fracção se obtem quadrando separadamente cada um de seus termos, segue-se que, se os dois termos de uma fracção forem quadrados perfeitos, *a raiz quadrada da fracção se acha extrahindo a raiz quadrada de cada um dos seus termos.*

Problema. Qual é a raiz quadrada de $\frac{9}{16}$?

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3\times3}}{\sqrt{4\times4}}=\frac{3}{4}.$$

1. Qual é a raiz quadrada de $\frac{1}{4}$? Resp. $\frac{1}{2}$.
2. Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$? » $\frac{5}{6}$.
3. Qual é a raiz quadrada de $\frac{16}{49}$? » ?
4. Qual é a raiz quadrada de $\frac{64}{81}$? » ?
5. Qual é a raiz quadrada de $\frac{256}{361}$? » ?
6. Qual é a raiz quadrada de $\frac{4096}{91809}$? » ?

Raiz quadrada approximada

299. Para illustrarmos o methodo de achar a raiz quadrada approximada de um quadrado imperfeito, vamos achar a raiz quadrada de 2 com a differença menor de $\frac{1}{3}$.

Reduzindo 2 á fracção cujo denominador seja 9 (quadrado de 3, denominador da fracção $\frac{1}{3}$), teremos $2=\frac{18}{9}$ Ora, a raiz quadrada de 18 é um numero maior do que 4, e menor do que 5; então a raiz quadrada de $\frac{18}{9}$ é maior do que $\frac{4}{3}$ e menor do que $\frac{5}{3}$; portanto, $\frac{4}{3}$ é a raiz approximada de 2 com a differença menor do que $\frac{1}{3}$.

Para acharmos a raiz quadrada de um numero inteiro com uma differença menor do que uma fracção dada, temos a seguinte

Regra. *Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da fracção que determina o grau de approximação, e deste producto extrahe-se a raiz quadrada mais approximada em inteiros, e divide-se pelo denominador da fracção dada.*

Achar a raiz quadrada approximada dos seguintes numeros:

1. De 5 com uma differença menor do que $\frac{1}{5}$. Resp. $2\frac{1}{5}$.
2. De 7 com uma differença menor do que $\frac{1}{13}$. » $2\frac{5}{13}$.
3. De 15 com uma differença menor do que $\frac{1}{25}$. » $3\frac{20}{25}$.
4. De 27 com uma differença menor do que $\frac{1}{30}$. » $5\frac{1}{6}$.
5. De 14 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$. » 3,7.

Extracção da raiz quadrada dos monomios

300. Para acharmos o modo de extrahir a raiz quadrada dos monomios, devemos notar como se fórma o seu quadrado.

Segundo a regra da elevação de um monomio a qualquer potencia (n.° **267**), vemos que

$$(5a^2b^3c)^2=5a^2b^3c\times5a^2b^3c=25a^4b^6c^2.$$

Para quadrarmos um monomio, temos de quadrar o seu coefficiente numeral, e depois multiplicar o expoente de cada factor litteral por 2. Então, para acharmos a raiz quadrada de um monomio que seja quadrado perfeito, temos a seguinte regra:

Regra. *Extrahe-se a raiz quadrada do coefficiente numeral, e divide-se o expoente de cada factor litteral por 2.*

Nota. Esta regra só tem applicação quando o monomio é um quadrado perfeito. Quando o monomio é quadrado imperfeito, a sua raiz quadrada póde sómente ser indicada. Assim, a raiz quadrada de é $3ab$ é $\sqrt{3ab}$.

301. **Signaes da raiz.** Se multiplicarmos $+a$ por $+a$, o producto será $+a^2$; se multiplicarmos $-a$ por $-a$, o producto será tambem $+a^2$. Então a raiz quadrada de $+a^2$ póde ser $+a$ ou $-a$; assim tambem a raiz quadrada de $25a^4b^6c^2$ póde ser $+5a^2b^3c$ ou $-5a^2b^3c$. Daqui concluimos que a raiz quadrada de um monomio positivo, póde ter o signal $+$ ou $-$, e esta resposta dupla se exprime com o signal dobrado $\pm$; assim, $\sqrt{9a^2}=\pm3a$, que se lê: A raiz quadrada de $9a^2$ é igual a mais ou menos $3a$.

302. Se um monomio é negativo, não é possivel extrahir a sua raiz quadrada, porque o quadrado de qualquer quantidade positiva ou negativa é sempre positivo. De sorte que $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$, $\sqrt{-b}$, são expressões algebricas, que indicam operações impossiveis, e por isso se denominam **quantidades imaginarias.** Quando, pois, encontrarmos expressões desta natureza nas equações do segundo grau, é porque ha algum absurdo no problema, ou impossibilidade na equação.

Achar a raiz quadrada de cada um dos seguintes monomios:

1. $\sqrt{4a^2x^2}=?$ Resp.	$\pm 2ax$.	5. $\sqrt{16m^4n^4y^4}=?$	?
2. $\sqrt{9x^2y^4}=?$ »	$\pm 3xy^2$.	6. $\sqrt{49a^2b^4c^2}=?$	?
3. $\sqrt{25a^2b^2c^4}=?$ »	$\pm 5abc^2$.	7. $\sqrt{625x^4z^4}=?$	?
4. $\sqrt{36a^4b^6x^2}=?$ »	$\pm 6a^2b^3x$.	8. $\sqrt{1156a^2x^4z^2}=?$	?

303. Desde que $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$, segue-se que $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\pm\frac{a}{b}$, isto é, *para se achar a raiz quadrada de uma fracção monomia, extrahe-se a raiz quadrada de ambos os seus termos.*

9. Achar a raiz quadrada de $\frac{4a^2}{9b^2}$. Resp. $\pm\frac{2a}{3b}$.

10. Achar a raiz quadrada de $\frac{16x^4y^4}{25a^2z^2}$. » ?

Extracção da raiz quadrada dos polynomios

304. Antes de formularmos a regra para a extracção da raiz quadrada dos polynomios, examinemos primeiro a relação que ha entre os varios termos de uma quantidade e o seu quadrado.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Daqui vemos que o quadrado de qualquer polynomio é formado pela seguinte lei:

305. *O quadrado de qualquer polynomio é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o producto do primeiro termo multiplicado pelo segundo; mais o quadrado do segundo, mais duas vezes os dois primeiros termos multiplicados pelo terceiro; mais o quadrado do terceiro, mais duas vezes os tres primeiros termos multiplicados pelo quarto; e assim por diante.*

I Problema. Qual é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$?

Solução. Como os termos deste polynomio se acham já ordenados com relação á lettra a, acharemos a raiz quadrada do 1.º termo que é a^2. Ora, a raiz quadrada de a^2 é a, que se escreve á direita como o primeiro termo da raiz. Subtrahindo agora do 1.º termo o quadrado desta raiz, nada resta.

Desce-se o resto do polynomio ($2ab+b^2$) para se operar. Dividindo-se então o termo deste resto pelo dobro da raiz achada, que é $2a$, temos o quociente b que é segundo termo da raiz. Multiplicando agora $2a+b$ por b, obtemos $2ab+b^2$ que subtraido do resto $2ab+b^2$, nada resta. Então, $a+b$ é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$.

Operação

	Raiz
$a^2+2ab+b^2$	$a+b$
a^2	
$0+2ab+b^2$	$(2a+b)\times b$.
$2ab+b^2$	
$0\quad 0$	

II Problema. Qual é a raiz quadrada de $4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$?

Operação

$4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$	$2a^2-3a-1$ Raiz
$4a^4$	
$0-12a^3+5a^2+6a+1$	$(4a^2-3a)\times(-3a)$
$-12a^3+9a^2$	
$0-4a^2+6a+1$	$(4a^2-6a-1)\times(-1)$
$0\quad 0\quad 0$	

Solução. A raiz quadrada do 1º termo do polynomio é $2a^2$, que será o 1.º termo da raiz. Subtrahindo do 1.º termo ($4a^4$) o quadrado da raiz achada ($2a^2\times 2a^2=4a^4$), nada restará.

O resto do polynomio ($-12a^3+5a^2+6a+1$) desce-se para ser operado. Dividindo este resto pelo dobro do 1.º termo da raiz ($2\times 2a^2=4a^2$), o quociente $-3a$ será o segundo termo da raiz, e se escreverá adiante de $4a^2$ para formar um novo divisor. Multiplicando-se agora $4a^2-3a$ por $-3a$, e o producto sendo subtrahido de $-12a^3+5a^2+6a+1$, restará $-4a^2+6a+1$.

Divide-se este resto pelo dobro dos dois termos da raiz, e o quociente -1 será o tercerio termo da raiz.

Junta-se este termo ao dobro dos dois primeiros termos, e tem-se $4a^2-6a-1$; multiplica-se esta quantidade pelo terceiro termo da raiz (-1) e subtrahe-se o producto de $-4a^2+6a+1$. Não havendo resto a raiz quadrada é $2a^2-3a-1$.

Regra. *I. Ordena-se o polynomio em relação ás potencias decrescentes de uma lettra; então acha-se o primeiro termo da raiz, extrahindo a raiz quadrada do primeiro termo do polynomio, e escreve-se o resultado á direita, e subtrahe-se o seu quadrado do polynomio dado.*

II. Divide-se o primeiro termo do resto pelo dobro da parte da raiz já achada, e o resultado que é o segundo termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo segundo termo da raiz, e o producto subtrahe-se do resto.

III. Dobram-se os termos da raiz já achados, para formar um divisor indicante; divide-se o primeiro termo do resto pelo primeiro termo do divisor, e o resultado, que é o terceiro termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo terceiro termo da raiz, e o producto subtrahe-se do ultimo resto. E assim se procede até passar por todos os termos do polynomio.

Achar a raiz quadrada dos seguintes polynomios:

1. x^2+4x+4. Resp. $x+2$.
2. $4x^2-12x+9$. » $2x-3$.
3. $x^2y^2-8xy+16$. » $xy-4$.
4. $4a^2x^2-20axyz+25y^2z^2$. » $2ax-5yz$.
5. $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$. » ?
6. $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$. » ?

306. Nenhum binomio póde ser quadrado perfeito, porque o quadrado de um monomio é um monomio, e o quadrado de um binomio é um trinomio. Assim, a^2+b^2 não é quadrado perfeito; mas se lhe addicionarmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a+b$, e se delle subtrahirmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a-b$.

307. Para que um trinomio seja quadrado perfeito, é necessario que os dois termos extremos sejam quadrados perfeitos, e que o termo do meio seja o dobro do producto das raizes quadradas dos termos extremos. De sorte que, para se achar a raiz quadrada de um trinomio que é um quadrado perfeito, *extrahem-se as raizes quadradas do primeiro termo e do terceiro, e unem-se com o signal do termo do meio.*

Assim, $4a^2-12ac+9c^2$ é um quadrado perfeito, porque $\sqrt{4a^2}=2a$, $\sqrt{9c^2}=\pm 3c$, e $2(2\times-3c)=-12ac$. Mas $9x^2+12xy+$ $+16y^2$ não é quadrado perfeito, porque, embora $\sqrt{9x^2}=3x$, e $\sqrt{16y^2}=4y$, $2(3x\times 4y)$ não é igual a $12xy$.

1. Qual é a raiz quadrada de a^2-2a+1? Resp. $a-1$.
2. Qual é a raiz quadrada de $1+2x+x^2$? » $1+x$.
3. Qual é a raiz quadrada de $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$? » $x+\frac{2}{3}$.
4. Qual é a raiz quadrada de $a^2-a+\frac{1}{4}$? » $a-\frac{1}{2}$.

Radicaes do segundo grau

308. Já vimos que, para um monomio ser um quadrado perfeito, é necessario que o seu coefficiente numeral seja um quadrado perfeito, e que o expoente de cada lettra seja exactamente divisivel por 2. Assim $4a^2$ é um quadrado perfeito, emquanto que $5a^3$ não é quadrado perfeito, porque o coefficiente 5 não é quadrado perfeito, e o expoente 3 não é divisivel por 2.

309. Em Algebra, si uma expressão não contém radicaes ou só contém numeros submettidos aos radicaes, a expressão se diz *racional;* si contiver, porém, lettras submettidas a radicaes, diz se *irracional* do 2.º, 3.º, 4.º, etc. graus conforme o indice do radical é 2, 3, 4, etc.

Assim $ab\sqrt{2}$ é racional, mas $2a\sqrt[3]{b}$ é irracional do 3º grau.

310. O coefficiente do radical é o numero ou a lettra que está antes do signal radical. Assim, nas expressões $5\sqrt{3}$ e $a\sqrt{b}$ as quantidades 5 e a são os coefficientes: 5 mostra que o radical $\sqrt{3}$ deve ser tomado 5 vezes, e a mostra que o radical $\sqrt{b}$ deve ser tomado a vezes.

311. Dois radicaes são semelhantes quando as quantidades debaixo do signal radical são iguaes ou as mesmas. Assim, $3\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ são radicaes semelhantes; assim tambem $b\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e $2b\sqrt{a}$ são radicaes semelhantes.

Reducção de um radical á sua fórma mais simples

312. Os radicaes do segundo grau podem, muitas vezes, ser simplificados, isto é, reduzidos a uma fórma simples, mas com o mesmo valor.

Esta reducção é baseada no seguinte principio:

A raiz quadrada do producto de dois ou mais factores é igual ao producto das raizes quadradas destes factores.

Assim, $\sqrt{144}=\sqrt{9\times 16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times 4=12$.

Tambem $\sqrt{a^2x}=\sqrt{a^2\times x}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{x}=a\sqrt{x}$.

Problema. Reduzir $\sqrt{4a}$ á sua fórma mais simples.

Solução. $\sqrt{4a}=\sqrt{4\times a}=\sqrt{4}\times\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

Regra. *Decompõe-se o radical em dois factores, de sorte que um delles seja um quadrado perfeito. Extrahe-se a raiz quadrada deste quadrado perfeito, e a raiz prefixa-se como coefficiente ao outro factor que fica debaixo do signal radical.*

Nota. Um radical fica reduzido á sua fórma mais simples, quando não tem debaixo do signal radical nenhum factor que seja quadrado perfeito.

Para se conhecer se uma quantidade contém um factor numeral que seja quadrado perfeito, vê-se se ella é divisivel por qualquer um dos quadrados perfeitos, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, etc. Se não for divisivel por nenhum delles, não conterá nenhum factor que seja quadrado perfeito, e esta quantidade não poderá ser reduzida.

Reduzir cada um dos seguintes radicaes á sua fórma mais simples:

1. $\sqrt{8a^2}$. Resp. $2a\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{12a^3}$. » $2a\sqrt{3a}$.
3. $\sqrt{16a^3b}$. » $4a\sqrt{ab}$.
4. $\sqrt{18a^4b^3c^3}$ » $3a^2bc\sqrt{2bc}$.
5. $\sqrt{20a^3b^3c^3}$. » $2abc\sqrt{5abc}$
6. $\sqrt{32a^5b^7c^4}$. Resp. ?
7. $\sqrt{40a^7b^3c^3}$. » ?
8. $\sqrt{44a^5b^2c}$. » ?
9. $\sqrt{45a^6b^7c^4}$. » ?
10. $\sqrt{75a^3b^5c^3}$. » ?

313. Uma fracção radical do segundo grau póde tambem ser reduzida a uma fórma mais simples.

Multiplicam-se os dois termos por uma quantidade que torne o denominador quadrado perfeito; decompõe-se a fracção em dois factores, dos quaes um seja quadrado perfeito; extrahe-se a raiz quadrada deste factor, e prefixa-se ao outro factor que fica debaixo do signal radical.

Problema. Reduzir $\sqrt{\frac{2}{3}}$ á sua fórma mais simples.

Solução. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$

Reduzir as seguintes fracções radicaes á sua fórma mais simples:

11.	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	Resp. $\frac{1}{5}\sqrt{15}.$	14.	$\sqrt{\frac{16}{27}}$	Resp. ?
12.	$\sqrt{\frac{7}{8}}$	» $\frac{1}{4}\sqrt{14}.$	15.	$\sqrt{\frac{11}{18}}$	» ?
13.	$\sqrt{\frac{12}{25}}$	» $\frac{2}{5}\sqrt{3}.$	16.	$\sqrt{\frac{9}{16}}$	» ?

314. Desde que $a = \sqrt{a^2}$, e $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$ é evidente que qualquer quantidade póde ser transformada em um radical do segundo grau, sendo elevada ao quadrado e posta debaixo do signal radical. Pelo mesmo principio, o coefficiente de um radical póde passar para debaixo do signal radical.

17. Transformar 5 em um radical do 2° grau.

Solução. $5 = \sqrt{5 \times 5} = \sqrt{25}.$

18. Transformar $2a$ em um radical do 2° grau. Resp. $\sqrt{4a^2}.$

19. Exprimir a quantidade $3\sqrt{5}$ com o coefficiente debaixo do radical. Resp. $\sqrt{45}.$

20. Passar o coefficiente de $3c\sqrt{2c}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{18c^3}.$

21. Passar o coefficiente de $5\sqrt{3}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{75}$

22. Passar o coefficiente de $4\sqrt{\frac{1}{8}}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{2}.$

Addição dos radicaes do segundo grau

315. I Problema. Qual é a somma de $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$?

Solução. E' evidente que 3 vezes mais 5 vezes qualquer quantidade devem fazer 8 vezes essa quantidade. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$

II Problema. Qual é a somma de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$?

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o segundo radical á sua fórma mais simples, e addicionando-o com o primeiro, temos $\sqrt{2}$ ou $1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Se os radicaes depois de simplificados apparecerem dessemelhantes, neste caso, só poderemos juntar estas quantidades, pondo o signal de addição entre elles. Assim, a somma de $2\sqrt{3}$ e $5\sqrt{7}$ é $2\sqrt{3} + 5\sqrt{7}$.

Regra. *Reduz-se cada radical á sua fórma mais simples, e, se os radicaes resultantes forem semelhantes, sommam-se os coefficientes, e a somma prefixa-se ao radical commum; mas, se forem dessemelhantes, juntam-se com o signal da addição.*

Achar a somma dos seguintes grupos de radicaes:

1.	$\sqrt{8}$ e $\sqrt{18}$.	Resp.	$5\sqrt{2}.$
2.	$\sqrt{12}$ e $\sqrt{27}$.	»	$5\sqrt{3}.$
3	$\sqrt{20}$ e $\sqrt{80}$.	»	$6\sqrt{5}.$
4.	$\sqrt{24}$ e $\sqrt{150}$.	»	$7\sqrt{6}.$
5	$\sqrt{75}$ e $\sqrt{147}$.	»	$12\sqrt{3}.$
6.	$\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$ e $\sqrt{50}$.	»	$11\sqrt{2}.$
7.	$\sqrt{40}$, $\sqrt{90}$ e $\sqrt{250}$.	»	$10\sqrt{10}.$
8.	$\sqrt{28x}$ e $\sqrt{63x}$.	»	$5\sqrt{7x}.$
9.	$\sqrt{3ab}$ e $6\sqrt{3ab}$.	»	$7\sqrt{3ab}.$
10.	$\sqrt{75a^2c}$ e $\sqrt{147a^2c}$.	»	$12a\sqrt{3c}.$

Subtracção dos radicaes do segundo grau

316. I Problema. Subtrahindo $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{2}$, quanto resta?

Solução. E' evidente que 5 vezes uma quantidade menos 3 vezes essa quantidade, é igual a 2 vezes a mesma quantidade. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

II Problema. Qual é a differença entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o radical maior a sua fórma mais simples, e operando a subtracção, vemos que a differença é $\sqrt{2}$.

Se os radicaes são dessemelhantes, é claro que a sua differença póde só ser indicada. Assim, subtrahindo $3\sqrt{a}$ de $5\sqrt{b}$ o resultado é $5\sqrt{b} - 3\sqrt{a}$.

Regra. *Reduzem-se os radicaes á sua fórma mais simples, e a differença entre o coefficiente do minuendo e o do subtrahendo prefixa-se ao radical commum.*

Se os radicaes não forem semelhantes, indica-se a sua differença com o signal de subtracção.

Exemplos para resolver:

		Resp.
1.	$\sqrt{18} - \sqrt{2}$.	$2\sqrt{2}$.
2.	$\sqrt{45a^2} - \sqrt{5a^2}$.	» $2a\sqrt{5}$.
3.	$\sqrt{45} - \sqrt{65}$.	» $2\sqrt{65}$.
4.	$\sqrt{112a^2c^2} - \sqrt{28a^2c^2}$.	» $2ac\sqrt{7}$.
5.	$\sqrt{27b^2c^3} - \sqrt{12b^2c^3}$.	» $bc\sqrt{3c}$.
6.	$5a\sqrt{27} - 3a\sqrt{48}$.	» $3a\sqrt{3}$.
7.	$2\sqrt{\frac{3}{4}} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}$.	» 0.
8.	$\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{\frac{10}{27}}$.	» $\frac{1}{18}\sqrt{30}$.

Multiplicação dos radicaes do segundo grau

317. I Problema. Qual é o producto de $\sqrt{a}$ multiplicado por $\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ segue-se que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ba}$

II Problema. Multiplicar $a\sqrt{b}$ por $c\sqrt{d}$

Solução. $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = a \times c \times \sqrt{b} \times \sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$.

Regra. *Multiplicam-se entre si as quantidades que estão debaixo do radical, e o producto escreve-se debaixo do radical.*

Se houver coefficientes, multiplicam-se entre si, e o resultado escreve-se como coefficiente do radical, e reduz-se esta expressão á sua fórma mais simples.

Exemplos para resolver:

1. Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{8}$.

Solução. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$.

2. Multiplicar $2\sqrt{14}$ por $3\sqrt{2}$.

Solução. $2\sqrt{14} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3\sqrt{14 \times 2} = 6\sqrt{28} = 6\sqrt{4 \times 7} =$
$= 6 \times 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$.

		Resp.
3.	Multiplicar $\sqrt{8}$ por $\sqrt{2}$.	4.
4.	Multiplicar $2\sqrt{a}$ por $3\sqrt{a}$.	» $6a$.
5.	Multiplicar $\sqrt{27}$ por $\sqrt{3}$.	» 9.
6.	Multiplicar $3\sqrt{2}$ por $2\sqrt{3}$.	» $6\sqrt{6}$.
7.	Multiplicar $3\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$.	» 18.
8.	Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{15}$.	» $3\sqrt{10}$.
9.	Multiplicar $2\sqrt{15}$ por $3\sqrt{35}$.	» $30\sqrt{21}$.
10.	Multiplicar $\sqrt{a^3b^5c}$ por $\sqrt{abc}$.	» a^2b^3c.
11.	Multiplicar $2\sqrt{3ab}$ por $3\sqrt{2ab}$.	» $6ab\sqrt{6}$.
12.	Multiplicar $\sqrt{\frac{1}{3}}$ por $\sqrt{\frac{3}{4}}$.	» $\frac{1}{2}$.

318. Quando dois polynomios têm radicaes do segundo grau, multiplicam-se do mesmo modo que os outros polynomios, observando só a direcção contida na regra precedente, como se vê na operação ao lado. A resposta é $6 - \sqrt{5} - 5$ que reduzida, dá $1 - \sqrt{5}$.

$$\begin{array}{r} 3 + \sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{5} \\ \hline 6 + 2\sqrt{5} \\ - 3\sqrt{5} - 5 \\ \hline 6 - \sqrt{5} - 5 \end{array}$$

		Resp.
13.	Multiplicar $2 + \sqrt{2}$ por $2 - \sqrt{2}$.	2.
14.	Multiplicar $3 + 2\sqrt{2}$ por $5 - 3\sqrt{2}$.	» $3 + \sqrt{2}$.
15.	Multiplicar $\sqrt{x+2}$ por $\sqrt{x-2}$.	» $\sqrt{x^2-4}$.
16.	Multiplicar $\sqrt{y+2}$ por $\sqrt{y+3}$.	» $\sqrt{y^2+5y+6}$.

Divisão dos radicaes do segundo grau

319. I Problema. Qual é o quociente de $\sqrt{ab}$ por $\sqrt{a}$.

Solução. Desde que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Segue-se que $\sqrt{ab} \div \sqrt{a} = \sqrt{\frac{ab}{a}} = \sqrt{b}$.

II Problema. Qual é o quociente de $ac\sqrt{bd}$ por $a\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, segue-se que $ac\sqrt{bd} \div a\sqrt{b} = \frac{ac\sqrt{bd}}{a\sqrt{b}} = \frac{ac}{a}\sqrt{\frac{bd}{b}} = c\sqrt{d}$.

Regra. *Dividem-se as quantidades que estão debaixo do signal radical, e o quociente escreve-se debaixo do signal.*

Se houver coefficientes, dividem-se, e o quociente prefixa-se ao quociente que está debaixo do radical.

Exemplos para resolver:

1. Dividir $8\sqrt{72}$ por $2\sqrt{6}$.

Solução. $\frac{8\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} = \frac{8}{2}\sqrt{\frac{72}{6}} = 4\sqrt{12} = 4\sqrt{4\times 3} = 8\sqrt{3}$

2. Dividir $\sqrt{54}$ por $\sqrt{6}$. Resp. 3.
3. Dividir $6\sqrt{54}$ por $3\sqrt{27}$. » $2\sqrt{2}$.
4. Dividir $6\sqrt{28}$ por $2\sqrt{7}$. » 6.
5. Dividir $\sqrt{160}$ por $\sqrt{8}$. » $2\sqrt{5}$.
6. Dividir $\sqrt{a^3}$ por $\sqrt{a}$. » a.
7. Dividir $ab\sqrt{a^3b^3}$ por $b\sqrt{ab}$. » a^2b.
8. Dividir $\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\sqrt{\frac{1}{3}}$. » $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

320. Uma fracção, cujo denominador é monomio ou binomio que contém radicaes do segundo grau, pode ser reduzida a uma fracção equivalente com um denominador racional.

Illustração. Quando uma fracção tem a fórma $\frac{a}{\sqrt{b}}$, multiplicando-se ambos os termos por $\sqrt{b}$, o denominador se tornará racional. Assim,

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Desde que a somma de duas quantidades multiplicadas por sua differença é igual á differença de seus quadrados (n.º **99**), segue-se que se a fracção tiver a fórma de $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, e nós multiplicarmos ambos os termos por $b-\sqrt{c}$, o denominador se tornará racional, porque será b^2-c. Assim,

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{ab-a\sqrt{c}}{b^2-c}.$$

Pela mesma razão, se o denominador fôr $b-\sqrt{c}$, o multiplicador será $b+\sqrt{c}$; se o denominador fôr $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}-\sqrt{c}$; e se o denominador fôr $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Regra. *Se o denominador fôr um monomio, multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo factor irracional do denominador; mas, se fôr um binomio, multiplicam-se ambos os termos pelo binomio dado no denominador com o segundo signal trocado, e o denominador se tornará racional.*

Reduzir as seguintes fracções a outras equivalentes com denominadores racionaes:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ » $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
3. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ Resp. $2-\sqrt{3}$
4. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ » $5+2\sqrt{6}$.

Solução das equações que conteem radicaes

321. Quando em uma equação, uma quantidade desconhecida está debaixo do signal radical, temos de tornar esta quantidade racional para podermos resolver a equação, isto é, temos de fazer desapparecer o signal radical sem alterar a igualdade da equação, para podermos achar o valor da incognita.

Como já vimos na **secção 169**, prop. 5.ª, *se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma potencia, os dois resultados serão iguaes.* Então para fazermos desapparecer o signal radical, temos duas direcções:

Primeira direcção. *Quando uma equação contém uma só expressão radical, transpõe-se esta expressão para um dos lados da equação, e os outros termos, para o outro, e depois quadrando os dois membros, faremos desapparecer o signal radical.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{(x-1)}-1=2$?

Solução. Transpondo o termo — 1 para a direita, temos $\sqrt{x-1}=3$. Quadrando agora estes dois membros da equação, temos $x-1=9$, ou $x=10$.

E' necessario que o discipulo se recorde que o quadrado de $\sqrt{x-1}$ é $x-1$, isto é, a mesma quantidade sem o signal radical. O quadrado do $\sqrt{3}$ é 3.

Operação

$$\sqrt{x-1}-1=2$$
$$\sqrt{x-1}=2+1=3$$
$$x-1=9$$
$$x=10$$

Segunda direcção. *Quando ha duas expressões radicaes, é geralmente preferivel escrever uma, de um lado da equação, e a outra, do outro, antes de quadrar os seus membros.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{(x-5)}-3=4-\sqrt{x-12}$.

Solução. Transpõe-se o termo — 3 para a direita, e depois quadram-se os dois membros, e desapparece o signal radical da esquerda.

O quadrado de $7-\sqrt{x-12}$ é $49-14\sqrt{x-12}+x-12$.

Transpondo-se agora o outro radical para a esquerda, e os outros termos para a direita, temos $14\sqrt{x-12}=42$. Como os numeros 14 e 42 são divisiveis por 14, podem ser simplificados, e a equação ficará sendo $\sqrt{x-12}=3$. Quadrando agora os dois membros da equação, temos $x-12=9$, ou $x=21$.

Operação

$$\sqrt{x-5}-3=4-\sqrt{x-12}$$
$$\sqrt{x-5}=7-\sqrt{x-12}$$
$$x-5=49-14\sqrt{x-12}+x-12.$$
$$14\sqrt{x-12}=42$$
$$\sqrt{x-12}=3$$
$$x-12=9$$
$$x=9+12=21.$$

Achar o valor de x nas seguintes equações.

1.	$\sqrt{x+3}+3=7.$	Resp.	$x=13.$
2.	$x+\sqrt{x^2+11}=11.$	»	$x=5.$
3.	$\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}.$	»	$x=9.$
4.	$x+\sqrt{x^2-7}=7.$	»	$x=4.$
5.	$2+\sqrt{3x}=\sqrt{5x+4}.$	»	$x=12.$
6.	$\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}$	»	$x=9.$
7.	$\sqrt{x+225}-\sqrt{x-424}-11=0.$	»	$x=1000.$
8.	$\sqrt{x^2+8}-x=2$	»	$x=1.$
9.	$\sqrt{36+x}=18-\sqrt{x}.$	»	$x=64.$
10.	$\sqrt{x+20}=\sqrt{x}+2$	»	$x=16.$
11.	$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\sqrt{a}.$	»	$x=\frac{5a}{4}.$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

322. Uma equação de segundo grau é a que tem a quantidade desconhecida elevada ao quadrado, isto é, com o expoente 2, como: $x^2=16$, e $x^2+2x=24$.

323. As equações do segundo grau podem ser incompletas ou completas.

Equações incompletas são as que podem ser reduzidas a dois termos como: $x^2=16$.

Equações completas são as que podem ser reduzidas a tres termos, como: $x^2+2x=24$.

324. Quando uma equação apparece já reduzida ao limite dos seus termos, como as duas equações que acima apresentamos como exemplos, é muito facil conhecer se ella é incompleta ou completa; mas, quando ella apparece muito complicada ou com muitos termos em ambos os membros, o meio mais seguro de conhecel-o é reduzil-a á sua fórma mais simples, isto é, ao seu menor numero de termos. Esta reducção opera-se do mesmo modo que a solução das equações do primeiro grau, pois consiste unicamente em *inteirar os termos fraccionarios da equação, transpol-os, addicional-os e reduzil-os ao menor numero em que a equação póde ser expressa.*

325. Simplifiquemos a seguinte equação para se verificar qual é o menor numero de termos a que ella póde ser reduzida.

Equação	$\frac{x^2}{3}-3+\frac{5x^2}{12}=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$
inteirando	$8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299.$
transpondo	$24x^2+8x^2+10x^2=7+72+299.$
addicionando	$42x^2=378$
dividindo por 42	$x^2=9.$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta só dois termos que são $x^2=9$, e por isso é uma equação incompleta de segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o numero 9 pela lettra q, teremos $x^2=q$. Esta expressão ou fórma serve para mostrar o menor numero de termos a que uma equação incompleta póde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação incompleta á fórma $x^2=q$, quer dizer reduzil-a á fórma mais simples em que ella póde ser expressa.

326. Simplifiquemos agora mais a seguinte equação para se reconhecer qual é o limite do numero de seus termos:

Equação	$\frac{7x^2}{3}+12+7x=\frac{4x^2}{3}+4x+40.$
inteirando	$7x^2+36+21x=4x^2+12x+120,$
transpondo	$7x^2-4x^2+21x-12x=120-36,$
addicionando	$3x^2+9x=84,$
dividindo por 3	$x^2+3x=28.$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta 3 termos que são $x^2+3x=28$, e por isso é uma equação completa do segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o valor de 3 por $2p$, e o valor de 28 por q, teremos $x^2+2px=q$. Esta expressão mostra o menor numero de termos a que uma equação completa póde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação completa á fórma $x^2+2px=q$, quer dizer exprimil-a na sua fórma mais simples.

327. Do que ficou exposto concluimos que *qualquer equação do segundo grau póde ser reduzida a uma equação incompleta de dois termos com a fórma* $x^2=q$, *ou a uma equação completa de tres termos com a fórma* $x^2+2px=q$.

Solução das equações incompletas do segundo grau

328. Problema I. Qual é o valor de x na equação $5x^2-18=3x^2+14$?

Solução. Equação .... $5x^2-18=3x^2+14$,
transpondo os termos ..... $5x^2-3x^2=14+18$,
reduzindo .... $2x^2=32$,
dividindo por 2 .... $x^2=16$,
extrahindo a raiz quadrada... $x=\pm 4$.

O processo é igual ao de uma equação de primeiro grau; chegando a $x^2=16$, extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação, e ficará $x=\pm 4$.

Como já vimos na secção **302**, o signal $\pm$ que precede ao numero 4, quer dizer que o valor de x póde ser $+4$ ou -4. Ora como x tem dois valores ou raizes, uma positiva e outra negativa, dá-se á positiva o nome de **primeira raiz,** e representa-se por x'; e á negativa dá-se o nome de **segunda raiz,** e representa-se por x''. De sorte que $x=\pm 4$ tambem póde ser expresso deste modo: $x'=4$, e $x''=-4$, que se lê: *primeira raiz igual a 4, e segunda raiz igual a menos 4.*

329. Em Arithmetica, como se opera sómente com numeros positivos, um quadrado tem só uma raiz, como $4\times 4=16$. Mas em Algebra, ha tambem quadrados de numeros negativos; assim o quadrado de -4 é $(-4)\times(-4)=16$, porque menos multiplicado por menos dá mais. Portanto 16 póde ser o quadrado de $+4$ ou de -4. Do que fica exposto, vemos que

1.º *Toda equação incompleta do segundo grau tem duas raizes.*

2.º *Estas raizes são numericamente iguaes, mas teem signaes oppostos.*

II Problema. Achar o valor de x na equação de $5x^2+4=49$.

$$5x^2+4=49$$
$$5x^2=45$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3.$$

Solução. Transpondo o termo 4, para a direita, a equação ficará $5x^2=49-4$ ou $5x^2=45$. Dividindo os dois membros por 5, temos $x^2=9$, e $x=\pm 3$. Ou $x'=3$ e $x''=-3$.

III Problema. Achar o valor de x na equação $\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\frac{2}{3}$?

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\tfrac{2}{3}$$
$$8x^2+9x^2=68$$
$$17x^2=68$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2.$$

Solução. Inteirando a equação, e reunindo os termos semelhantes, temos $17x^2=68$.

Simplificando estes termos, dividindo-os por 17, temos $x^2=4$; então $x=\pm 2$, ou $x'=2$ e $x''=-2$.

IV Problema. Achar o valor de x na equação $ax^2+b=cx^2+d$.

$$ax^2+b=cx^2+d$$
$$ax^2-cx^2=d-b$$
$$x^2(a-c)=d-b$$
$$x^2=\frac{d-b}{a-c}$$
$$x=\sqrt{\frac{d-b}{a-c}}.$$

Solução. Transpondo para a esquerda os termos que tem a lettra x, e pondo x^2 em evidencia temos $x^2(a-c)=d-b$. Então $x^2=\frac{d-b}{a-c}$ e x igual á raiz quadrada desta fracção.

330. Para resolvermos uma equação incompleta do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. *Reduz-se a equação á fórma* $x^2=q$, *e depois extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação.*

Achar o valor de x em cada uma das seguintes equações:

1.	$x^2-8=28$.	Resp.	$x=\pm 6$.
2.	$3x^2-15=83+x^2$.	»	$x=\pm 7$.
3.	$7x^2-25=4x^2-13$.	»	$x=\pm 2$.
4.	$a^2x^2-b^2=0$.	»	$x=\pm\frac{b}{a}$.
5.	$5x^2-2=8-35x^2$.	»	$x=\pm\frac{1}{2}$.
6.	$\frac{5x^2}{3}+12=\frac{8x^2}{7}+37\frac{2}{3}$.	»	$x=\pm 7$.
7.	$6x^2-48-2x^2=96$.	»	$x=\pm 6$.
8.	$\frac{4x^2+5}{9}=45$.	»	$x=\pm 10$.
9.	$x^2-36=\frac{x^2}{4}+12$.	»	$x=\pm 8$.
10.	$3x^2-200=\frac{x^2}{4}+196$.	»	$x=\pm 12$.

Resolver os seguintes problemas que produzem equações incompletas do segundo grau:

1. Achar um numero cujos $\frac{2}{3}$ multiplicados pelos seus $\frac{2}{5}$ darão um producto igual a 60.

Solução. Seja x o numero; então....... $\frac{2x}{3}\times\frac{2x}{5}=60$ ou $\frac{4x^2}{15}=60$,
inteirando .... $4x^2=900$,
dividindo por 4 .... $x^2=225$,
resposta .... $x=\pm 15$.

2. Multiplicando-se $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ de certo numero, o producto é 108, qual é o numero? Resp. ± 36.

3. Qual é o numero cújo quadrado menos 16 é igual á metade do seu quadrado mais 16? Resp. ± 8.

4. Qual é o numero cujo quadrado menos 54 é igual ao quadrado da sua metade mais 54? Resp. ?

5. Qual é o numero que, sendo dividido por 9, dá o mesmo quociente que 16 dividido pelo numero?
Resp. ?

6. Dois numeros estão um para o outro na razão de 3 para 5, e a differença entre os seus quadrados é 64. Quaes são os numeros?
Resp. 6 e 10.

Solução. Sejam $3x$ o numero menor, e $5x$ o numeco maior. Quadrando estes numeros, e formando a equação, temos $25x^2-9x^2=64$. Resolvida a equação, temos $x=2$. Então o numero menor, que é $3x$, é igual a 6, e o maior igual a 10.

7. Quaes são os numeros que estão na razão de 3 para 4, e a differença entre os seus quadrados é 63? Resp. ?

8. Qual é o numero que, se lhe juntarmos 3, e se delle subtrahirmos 3, o producto desta somma e desta differença será 40?

Solução. $(x+3)\ (x-3)=40$; $x^2-9=40$, e $x=7$.

9. Um homem perguntou a outro quantos contos de réis tinha no banco, e este respondeu: Se ao quadrado do numero fossem accrescentados 6 contos, eu teria 42. Quantos contos tinha no banco?
Resp. 6 contos.

10. Qual é o numero cuja oitava parte, sendo multiplicada pela sua quinta parte, e o producto dividido por 4, dá o quociente igual a 40?
Resp. 80.

Solução das equações completas do segundo grau

331. Já vimos no **n.º 323** que uma equação completa do segundo grau, estando reduzida, contém sómente tres termos, sendo dois do primeiro membro, e um do segundo, como: $x^2+6x=40$. Ora, como o primeiro membro de uma equação completa é um binomio, precisamos saber accrescentar-lhe mais um termo para o tornar quadrado perfeito.

332. Se elevarmos a quantidade $(x+3)$ ao seu quadrado, teremos $(x+3)^2=x^2+6x+9$ (**n.º 93**). Vemos aqui que o quadrado da somma das quantidades $x+3$ é igual ao quadrado da primeira quantidade, que é $x\times x=x^2$; mais duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, que é $2(x\times 3)=6x$; mais o quadrado da segunda quantidade que é $3\times 3=9$. (Véde **n.º 281**).

Se tivermos sómente os dois primeiros termos x^2+6x, e quizermos achar o terceiro termo, será facil determinal-o, porque sendo o segundo termo $(6x)$ producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, tomado duas vezes $2(x\times 3)$, segue-se que uma vez só é $x\times 3$; e neste producto x é a primeira quantidade, e 3 é a segunda. Ora, como o termo que temos de juntar é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que temos de juntar o quadrado de 3, que é $3\times 3=9$. Juntando esse termo, temos x^2+6x+9.

333. Podemos, pois, considerar os dois termos do primeiro membro de uma equação completa do segundo grau como um quadrado a que falta o ultimo termo, para ficar completo.

Problema. Que termo ou quantidade devemos juntar ao binomio x^2+x para o tornar quadrado perfeito?

Solução. Se o segundo termo x é duas vezes o producto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, uma só vez será $\frac{x}{2}$. Ora, nêste producto, sendo x um dos factores, o outro deve ser $\frac{1}{2}$ porque $x\times\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$. E como o termo que falta é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que lhe devemos juntar o quadrado de $\frac{1}{2}$ que é $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. O quadrado perfeito é, portanto, $x^2+x+\frac{1}{4}$.

Regra. *Para se completar um quadrado, accrescenta-se aos dois termos dados o quadrado da metade do coefficiente de x.*

Nota. No problema acima resolvido, o coefficiente de x é 1 subentendido (**n.º 23**). A metade de 1 é $\frac{1}{2}$ e o quadrado de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. No exemplo precedente, o coefficiente de x é 6, e a metade de 6 é 3, e o quadrado de 3 é 9.

Completar o quadrado nas seguintes expressões:

1. x^2+10x. Resp. $x^2+10x+25$.
2. x^2-12x. » $x^2-12x+36$.
3. x^2+8x. » $x^2+8x+16$.
4. x^2-16x. » ?
5. x^2+3x. » ?
6. x^2-5x. » ?
7. x^2-x. » $x^2-x+\frac{1}{4}$.
8. $x^2+\frac{3x}{2}$. » $x^2+\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}$
9. x^2-11x. » ?
10. $x^2+\frac{4x}{5}$. » ?

Achar as raizes das equações completas

334. Como já sabemos completar o quadrado, resta-nos agora sómente juntar ao segundo membro da equação o mesmo termo ou quantidade que juntamos ao primeiro, afim de conservarmos a igualdade entre estes dois valores, e podermos resolver a equação.

I Problema. Quaes são as raizes da equação $x^2+8x=33$?

Solução. Para completarmos o quadrado no primeiro membro da equação, temos de addicionar-lhe o numero 16; e para que a igualdade não fique alterada, temos de addicionar tambem 16 ao segundo membro. Extrahindo a raiz quadrada em ambos os membros, achamos que a raiz do 1.º membro é $x+4$, e a do 2.º é $+7$ ou -7, porque ambas estas raizes dão o quadrado 49. O valor de x apparece finalmente com a fórma de -4 ± 7, isto quer dizer que, se o numero 7 fôr tomado no sentido positivo, o valor de x será -4 mais $+7=3$; mas se fôr tomado no sentido negativo, o valor x será -4 mais $-7=-11$. A equação dada tem, portanto, duas respostas ou raizes; uma positiva que é $x'=3$; e a outra negativa que é $x''=-11$.

$$x^2+8x=33$$
$$x^2+8x+16=33+16=49$$
$$x+4=\pm7$$
$$x=-4\pm7$$
$$x'=3$$
$$x''=-11.$$

Verifiquemos agora como estas duas raizes satisfazem os valores da equação.

$$(3\times3)+(8\times3)=9+24=33.$$
$$(-11\times-11)+8\times(-11)=121-88=33.$$

II Problema. Resolver a equação $x^2-6x=16$.

Solução. Completa-se o quadrado no primeiro membro; iguala-se depois o segundo membro; e extrahida finalmente a raiz quadrada, o resultado é $x-3=\pm5$.

O valor de x é 8 ou -2.

O discipulo fará a verificação.

$$x^2-6x=16$$
$$x^2-6x+9=16+9=25$$
$$x-3=\pm5$$
$$x'=3+5=8$$
$$x''=3-5=-2.$$

III Problema. Achar o valor de x na equação $3x-5=\frac{7x+36}{x}$.

Solução.

Equação	$3x-5=\frac{7x+36}{x}$,
inteirando a equação	$3x^2-5x=7x+36$,
transpondo os termos	$3x^2-12x=36$,
dividindo os termos por 3..	$x^2-4x=12$,
completando o quadrado ...	$x^2-4x+4=16$,
extrahindo as raizes	$x-2=\pm4$,
valores de	$x=2\pm4$,
	$x'=2+4=6$,
	$x''=2-4=-2$.

Para resolvermos uma equação completa do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. *Reduz-se a equação á fórma $x^2+2px=q$; acha-se depois o quadrado da metade do coefficiente do segundo termo, e junta-se a ambos os membros da equação.*

Extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros, e transpõe-se o termo conhecido para o segundo membro.

Resolver cada uma das seguintes equações completas do segundo grau.

1.	$x^2+8x=20$.	Resp.	$x=2$ ou -10.
2.	$x^2+16x=80$.	»	$x=4$ ou -20.
3.	$x^2+7x=78$.	»	$x=6$ ou -13.
4.	$x^2+3x=28$.	»	$x=4$ ou -7.
5.	$x^2-10x=24$.	»	$x=12$ ou -2.
6.	$x^2-8x=20$.	»	$x=10$ ou -2.
7.	$x^2-5x=6$.	»	$x=6$ ou -1.
8.	$x^2-21x=100$.	»	$x=25$ ou -4.
9.	$x^2+6x=-8$.	»	$x=-2$ ou -4.
10.	$x^2+4x=-3$.	»	$x=-1$ ou -3.
11.	$x^2-6x=-8$.	»	$x=4$ ou 2.
12.	$x^2-8x=-15$.	»	$x=5$ ou 3.
13.	$x^2-10x=-21$.	»	$x=7$ ou 3.
14.	$x^2-15x=-54$.	»	$x=9$ ou 6.
15.	$3x^2-2x+123=256$.	»	$x=7$ ou $-\frac{19}{3}$.
16.	$2x^2-5x=12$.	»	$x=4$ ou $-\frac{3}{2}$.
17.	$2x^2+3x=65$.	»	$x=5$ ou $-\frac{13}{2}$.
18.	$\frac{2x^2}{3}-\frac{5x}{2}=\frac{2}{3}$.	»	$x=4$ ou $-\frac{1}{4}$.
19.	$\frac{x^2}{100}=x-24$.	»	$x=60$ ou -40.
20.	$x^2-x-40=170$.	»	$x=15$ ou -14.
21.	$x^2=\frac{6-x}{2}$.	»	$x=\frac{3}{2}$ ou -2.
22.	$x-1+\frac{2}{x-4}=0$.	»	$x=3$ ou 2.
23.	$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$.	»	$x=2$ ou 4.
24.	$3x^2+5x=2$.	»	$x=\frac{1}{3}$ ou -2.

Resolver os seguintes problemas que produzem equações completas do segundo grau:

I Problema. Qual é o numero cujo quadrado sommado com 15, dá um resultado igual a 8 vezes esse numero?

Solução. Seja x o numero; então temos:

Equação	$x^2+15=8x$,
transpondo os termos	$x^2-8x=-15$,
completando o quadrado	$x^2-8x+16=16-15=1$,
extrahindo a raiz quadrada	$x-4=\pm1$,
valores da incognita	$x'=5$,
	$x''=3$.

II Problema. Dividir o numero 24 em duas partes, de sorte que o producto dessas partes seja 95.

Solução. Seja x= a um dos numeros; então $24-x$=ao outro.
Equação .... $x(24-x)=95$,
tirando o parenthesis .... $24x-x^2=95$,
mudando os signaes .... $x^2-24x=-95$,
$x=5$,
$24-x=19$.

III Problema. Um fazendeiro comprou certo numero de carneiros por 80$; se elle tivesse comprado o mesmo numero e mais 4 carneiros pelos mesmos 80$, o preço de cada carneiro seria 1$ menos. Quantos carneiros comprou?

Solução. Seja x o numero dos carneiros, então $\frac{80\$}{x}$ é o preço que custou cada carneiro; e $\frac{80\$}{x+4}$ o preço que custaria se elle comprasse mais 4. A differença dos dois preços deve ser igual a 1$000.

Então $\frac{80\$}{x} - \frac{80\$}{x+4} = 1\$$. Resolvida esta equação, achamos que o valor de x é 16, numero de carneiros que o fazendeiro comprou.

4. Qual o numero inteiro e positivo cujo quadrado addicionado com 6 vezes o numero dará 55. Resp. 5.

5. Qual um numero inteiro e positivo de cujo quadrado subtrahindo 6 vezes o mesmo numero, restará 7. Resp. 7.

6. Achar o numero inteiro e positivo cujo dobro do quadrado mais 3 vezes o numero dará 65. Resp. 5.

7. Achar dois numeros taes que a sua differença seja 6, e o seu producto seja 160. Resp. 10 e 16 ou — 10 e —16.

8. Achar dois numeros cuja somma seja 23, e cujo producto seja 132. Resp. 11 e 12.

9. Dividir o numero 50 em duas partes, de sorte que o seu producto seja 544. Resp. ?

10. Dividir o numero 30 em duas partes, de sorte que o seu producto seja igual a oito vezes a sua differença. Resp. 6 e 24.

11. Perguntando-se a um menino que estudava Algebra, qual era a sua idade, elle respondeu: Se do quadrado da minha idade subtrahirdes $\frac{3}{8}$ da minha idade, o resultado será 250 annos. Quantos annos tinha o mesmo? Resp. 16 annos.

12. Um professor dividiu 144 laranjas pelos seus discipulos; se houvesse mais dois alumnos, cada um delles teria recebido uma laranja de menos. Qual era o numero de discipulos? Resp. 16.

Fórmas da equação completa do segundo grau

335. Já sabemos reduzir uma equação completa do segundo grau á fórma $x^2+2px=q$ (n.º **326**); já sabemos tambem completar o quadrado sem desfazer a igualdade dos dois membros da equação (n. **332**); já sabemos finalmente achar as duas raizes da equação (n.º **334**); resta agora sabermos distinguir as diversas fórmas em que apparece esta equação. E' esse o ponto que agora vamos estudar.

336. Se examinarmos com attenção os exercicios 1º, 5º, 9º e 12º da pagina 158, notaremos que as equações destes exercicios apresentam fórmas differentes como podemos verificar, pondo-as em uma ordem seguida.

1.º exercicio, $x^2+8x=20$. Resp. $x=2$ ou -10.
5.º exercicio, $x^2-10x=24$. » $x=12$ ou -2.
9.º exercicio, $x^2+6x=-8$. » $x=-2$ ou -4.
12.º exercicio, $x^2-8x=-15$. » $x=5$ ou 3.

337. Nestes quatro exercicios vemos que uma equação completa do segundo grau não tem uma só fórma, mas póde apparecer de quatro fórmas diversas assim generalizadas:

1.º exercicio $=x^2+2px=q$, **1.ª fórma;**
5.º exercicio $=x^2-2px=q$, **2.ª fórma;**
9.º exercicio $=x^2+2px=-q$, **3.ª fórma;**
12.º exercicio $=x^2-2px=-q$, **4.ª fórma.**

338. Os caracteristicos que distinguem estas fórmas são os seguintes: O termo x^2 é sempre positivo em todas as fórmas, mas os termos $2px$ e q são ambos positivos na 1.ª fórma; o primeiro é negativo e outro positivo na 2.ª fórma; o primeiro é positivo e outro negativo na 3.ª fórma, e finalmente ambos são negativos na 4.ª fórma.

339. Daqui concluimos que *toda equação completa do segundo grau póde ser reduzida á fórma* $x^2+2px=q$, *na qual, os termos* $2px$ *e* q *podem ser ambos quantidades positivas ou negativas, ou um ser positivo e o outro negativo.*

340. As fórmas de uma equação completa podem tambem ser distinguidas pelo resultado da solução, isto é, pelas suas raizes. Assim, a 1.ª fórma tem a raiz positiva numericamente menor do que a negativa; a 2.ª fórma tem a raiz positiva numericamente maior do que a negativa; a 3.ª fórma tem ambas as raizes negativas, e a 4.ª tem ambas as raizes positivas.

341. Vamos agora achar as raizes das diversas fórmas de uma equação completa do segundo grau.

Problema. Qual é o valor de x na equação $x^2+2px=q$?

Solução. Para resolvermos esta equação, temos de completar o quadrado do primeiro membro, juntando o quadrado da metade do coefficiente de x (**ns. 332** e **333**). Ora o coefficiente de x é $2p$ (**n. 325**); a metade de $2p$ é p, e o quadrado de p é p^2. Juntando p^2 ao primeiro membro, temos de juntal-o tambem no segundo para conservar a igualdade da equação.

A equação é pois .... $x^2+2px=q$,

completando o quadrado.... $x^2+2px+p^2=q+p^2$,

extrahindo a raiz quadrada.. $x+p=\pm\sqrt{q+p^2}$,

Primeira raiz.............. $x'=-p+\sqrt{q+p^2}$,

Segunda raiz.............. $x''=-p-\sqrt{q+p^2}$.

Nota. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida tem uma só raiz ou resposta, como ficou demonstrado na **secção 214;** uma equação incompleta do segundo grau tem duas raizes, sendo uma positiva e a outra negativa (**n.º 334**), e uma equação completa do segundo grau tem duas raizes, podendo ambas ser positivas ou negativas, ou uma positiva e a outra negativa (**n.º 340**).

Se uma raiz é positiva e outra negativa, a positiva chama-se *primeira raiz*, e a negativa, *segunda raiz* (**n.º 328**); mas se ambas são positivas ou negativas, a primeira que se acha, chama-se *primeira raiz*, e a outra, *segunda raiz*, e distinguem-se tambem por x' e x''.

342. Resolvendo agora as outras fórmas como resolvemos a primeira, obteremos as seguintes raizes:

(1.ª)	$x^2+2px=q$.	Raiz	$x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(2.ª)	$x^2-2px=q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(3.ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=-p\pm\sqrt{-q+p^2}$.
(4.ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{-q+p^2}$.

Achar as raizes de uma equação completa por meio da sua fórma generalizada

I Problema. Quaes são as raizes da equação $x^2+8x=20$?

Solução. Esta equação tem a primeira fórma, e a raiz desta fórma é $x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$ (**n.º 342**). Vemos nos dados do problema, que $q=20$, $p=\frac{8}{2}=4$, e $p^2=4\times 4=16$. Substituindo agora estas lettras pelos seus respectivos valores, temos

$$x=-4\pm\sqrt{20+16=36}.$$
$$x=-4\pm 6,\ \text{isto é},\ +2\ \text{ou}\ -10.$$

II Problema. Quaes são os valores de x na equação $x^2-10x=24$?

Solução. Esta equação tem a segunda fórma, e a raiz desta fórma é $x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$ (**n.º 342**). Nos dados do problema, vemos que $q=24$, $p=\frac{10}{2}=5$, e $p^2=5\times 25$. Substituindo agora, nesta raiz, estas lettras pelos seus respectivos valores, temos

$$x=+5\pm\sqrt{24+25=49}$$
$$x=+5\pm 7,\ \text{isto é},\ +12\ \text{ou}\ -2.$$

As raizes das outras fórmas acham-se do mesmo modo.

Os discipulos devem agora resolver por este processo todos os exercicios das paginas 159.

Propriedades das equações completas do segundo grau

343. Já vimos na **secção 341** que a fórma $x^2+2px=q$ tem duas raizes que são

$$\begin{array}{ll} 1.^{a}\ raiz & -p+\sqrt{q+p^2} \\ 2.^{a}\ raiz & -p-\sqrt{q+p^2} \\ \hline & -2p \end{array}$$

Sommando estas duas raizes, temos $-2p$, isto é, o coefficiente de x com o signal trocado. Daqui estabelecemos a

1.ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau, a somma das duas raizes é igual ao coefficiente do segundo termo com o signal trocado.*

344. Se multiplicarmos as duas raizes, o producto será $p^2-(q+p^2)$, tirando o parenthesis, ficará p^2-q-p^2, isto é, $-q$. Ora $-q$ é o termo conhecido do segundo membro com o signal contrario. Daqui podemos estabelecer a

$$\begin{array}{lr} -p+\sqrt{q+p^2} & 1.^{a}\ raiz \\ -p-\sqrt{q+p^2} & 2.^{a}\ raiz \\ \hline p^2-p\sqrt{q+p^2} & \\ +p\sqrt{q+p^2}-(q+p^2) & \\ \hline p^2.........-(q+p^2) & \end{array}$$

2.ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau, o producto das duas raizes é igual ao termo conhecido do segundo membro com o signal contrario.*

345. Estas duas propriedades são de grande importancia, porque se a somma das duas raizes dá o coefficiente de x, e o producto dá o segundo membro, podemos facilmente formar ou achar qualquer equação completa por meio sómente das suas raizes.

Exemplo. As raizes de uma equação são $+4$ e -5; qual é a equação?

Solução. Para formar esta equação, precisamos achar o coefficiente de x, e o valor do termo do segundo membro. Ora a somma das duas raizes $+4$ e -5 é -1, com o signal contrario é $+1$; portanto o coefficiente de x é $+1$. O producto das duas raizes $+4$ e -5 é -20, com o signal contrario fica $+20$; portanto o termo do segundo membro é $+20$, e a equação é $x^2+1x=20$ ou $x^2+x=20$.

Para se formar uma equação, sendo dadas as suas raizes, temos a seguinte regra:

Regra. *A somma das raizes com o signal contrario dará o coefficiente de* **x**.

O producto das raizes com o signal contrario dará o termo do membro seguinte.

Formar as seguintes equações:

1. Qual é a equação que tem as raizes $+9$ e -10? Resp. $x^2+x=90$.
2. Formar uma equação, sendo dadas as raizes $+6$ e -10. Resp. $x^2+4x=60$.
3. Se as raizes de uma equação são $+8$ e -2, qual é a equação? Resp. $x^2-6x=16$.
4. Qual é a equação cujas raizes são -6 e -7? Resp. $x^2+13x=-42$.

346. 3.ª Propriedade. *Uma equação do segundo grau póde ser transformada em uma expressão trinomia que se póde decompôr em dois factores binomios, dos quaes o primeiro termo de cada um é* **x**, *e o segundo, uma das raizes com o signal contrario.*

Illustremos esta propriedade. Se tomarmos qualquer equação completa do segundo grau, por exemplo, a equação $x^2+8x=20$, e transpuzermos o termo 20 para o primeiro membro, teremos $x^2+8x-20=0$.

Este resultado constitue uma equação trinomia do segundo grau, que tem a propriedade de se decompôr em dois factores binomios, sendo um factor x e a raiz $+2$ com o signal contrario, ou $(x-2)$; e o outro factor x e a raiz -10 com o signal contrario, $(x+10)$. Os dois factores são pois $(x-2)$ e $(x+10)$: com effeito $(x-2)\ (x+10)=x^2+8x-20$. Indaguemos agora como poderemos achar as raizes -2 e $+10$ sem resolver a equação $x^2+8x=20$.

Já vimos que a somma das duas raizes dá o coefficiente de x com o signal contrario, e que o producto das mesmas raizes dá o termo conhecido do segundo membro com o signal contrario, ou o terceiro termo do trinomio com o mesmo signal. Ora, se procurarmos dois numeros cujo producto seja igual a -20, teremos -4 e 5 ou -2 e 10. Os dois primeiros, como não sommam algebricamente 8, não servem para o caso; os dois ultimos, como sommam algebricamente 8, são os numeros ou raizes requeridas, porque $(-2)\times(+10=-20$; e tambem

$$(-2)+(+10)=+8.$$

Para se decompôr uma equação trinomia em dois factores binomios, temos a seguinte regra:

Regra. *Acham-se dois numeros cuja somma algebrica seja igual ao coefficiente de* **x**, *e cujo producto seja igual ao terceiro termo do trinomio.*

Depois a lettra x sommada a um dos numeros será um factor, e a lettra x sommada ao outro numero será o outro factor.

Decompôr as seguintes expressões:

1. Achar os factores de x^2+6x+8. Resp. $(x+2)\ (x+4)$.
2. Decompôr a expressão $x^2+6x-27$ em seus factores binomios. Resp. $(x-3)\ (x+9)$.
3. Decompôr a expressão $x^2-2x-24$ em seus factores binomios. Resp. $(x-6)\ (x+4)$.
4. Achar os factores da expressão x^2-x-42. Resp. ?

Equações do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas

347. Para resolver uma equação do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas, temos de eliminar uma dellas, afim de obtermos uma equação simples, com uma só quantidade desconhecida.

I Problema. Achar os valores de x e y nas equações $x-y=2$ e $x^2+y^2=100$.

Solução. O valor de x na (1.ª) equação é $x=2+y$ ou $y+2$. Quadrando este valor, temos $(y+2)^2=$ $=y^2+4y+4$. Substituindo agora na (2.ª) equação a quantidade x^2 pelo seu valor, temos a (3.ª) equação; simplificando-a, temos a (4.ª). Dividindo os seus termos por 2, temos a (5.ª). Subtrahindo agora 1 em ambos os membros para tornar o primeiro membro quadrado perfeito, temos a (6.ª). Extrahida a raiz quadrada de ambos os membros, segue-se o processo já conhecido, que dá $y=6$ ou -8 e $x=8$ ou -6.

$$\begin{aligned} x-y&=2 & (1.^a)\\ x^2+y^2&=100 & (2.^a)\\ y^2+4y+4+y^2&=100 & (3.^a)\\ 2y^2+4y+4&=100 & (4.^a)\\ y^2+2y+2&=50 & (5.^a)\\ y^2+2y+1&=49 & (6.^a)\\ y+1&=\ \ 7 & \end{aligned}$$

$y=-1\pm7$, isto é, 6 ou -8
$x=y+2=8$ ou -6.

II Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=8$ e $xy=15$?

Solução. O valor de x na (1.ª) equação é $x=8-y$; substituindo agora na (2.ª) equação a lettra x pelo seu valor $8-y$, temos a (3.ª) equação que, sem parenthesis, dá a (4.ª). Mudando o lugar e os signaes dos termos, temos a (5.ª). Resolvida esta equação, como aprendemos na **secção 334**, segue-se o processo já conhecido, que dá $y=5$ ou 3 e $x=3$ ou 5.

$$\begin{aligned} x+y&=8 & (1.^a)\\ xy&=15 & (2.^a)\\ (8-y)\ y&=15 & (3.^a)\\ 8y-y^2&=15 & (4.^a)\\ y^2-8y&=-15 & (5.^a) \end{aligned}$$

$y=5$ ou 3
$x=3$ ou 5.

III Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x^2+y^2=164$, e $xy=80$?

Solução. Multiplicando a (2.ª) equação por 2, e sommando-a depois com a (1.ª), temos a (3.ª) equação, que são dois quadrados perfeitos. Extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros, achamos que o valor de x é $18-y$.

Substituindo agora na (2.ª) equação a lettra x pelo seu valor, temos a (4.ª) equação que, tirado o parenthesis e mudados os termos, se transforma na (5.ª).

Resolvida esta equação **(n. 334)**, achamos que os valores de y são 10 e 8, ou os de x, 8 ou 10.

$$x^2+y^2=164 \quad (1.^a)$$
$$xy=80 \quad (2.^a)$$
$$2xy=160$$
$$x^2+y^2=164 \quad (3.^a)$$
$$x^2+2xy+y^2=324$$
$$x+y=18$$
$$x=18-y$$
$$(18-y)y=80 \quad (4.^a)$$
$$y^2-18y=-80 \quad (5.^a)$$

Achar o valor de x e y nas seguintes equações:

1. $x+y=16$ — Resp. $x=9$ ou 7.
   $xy=63$. — » $y=7$ ou 9.
2. $x-y=5$. — » $x=9$ ou -4.
   $xy=36$. — » $y=4$ ou -9.
3. $x+y=9$. — » $x=7$ ou 2.
   $x^2+y^2=53$. — » $y=2$ ou 7.
4. $x-y=5$. — » $x=8$ ou -3.
   $x^2+y^2=73$. — » $y=3$ ou -8.
5. $x+y=11$. — » $x=6$.
   $x^2-y^2=11$. — » $y=5$.
6. $x^2+y^2=34$. — » $x=\pm 3$.
   $x^2-y^2=16$. — » $y=\pm 5$.

O discipulo deve agora resolver os seguintes problemas que produzem equações do segundo grau com duas incognitas:

1. A somma de dois numeros é 10, e a somma dos seus quadrados é 52; quaes são os numeros? Resp. 4 e 6.

2. A differença de dois numeros é 3, e a differença dos seus quadrados é 39; quaes são os numeros? Resp. ?

3. Dividir o numero 25 em duas partes, de sorte que a somma dos quadrados dessas partes seja 425; quaes são as partes? Resp. ?

4. Dividir o numero 10 em duas partes, de sorte que o producto dessas partes exceda 22 á sua differença. Resp. 6 e 4 ou 2 e 8.

5. A somma de 6 vezes um de dois numeros, e 5 vezes o outro é 50, e o seu producto é 20; quaes são esses numeros? Resp. 5 e 4 ou $\frac{10}{3}$ e 6.

6. A somma do quadrado de dois numeros é 13, e a differença desses quadrados é 5; quaes são os numeros? Resp. ?

7. A differença de dois numeros multiplicada por um delles é $=16$, mas multiplicada pelo outro é $=12$; quaes são os numeros? Resp. 8 e 6 ou -8 e -6.

8. Achar dois numeros cujo producto seja 54, e o quociente de um delles dividido pelo outro seja 6. Resp. ?

9. A somma dos quadrados de dois numeros é a, e a differença desses quadrados é b; quaes são os numeros?

Resp. $\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ e $\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

10. Achar dois numeros que estejam um para o outro, assim como 3 está para 4, e a somma dos seus quadrados seja 400? Resp. ± 12 e ± 16.

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

348. Uma equação que apenas tem a segunda e a quarta potencias da incognita com a quantidade conhecida relativa ao seu valor, chama-se **equação biquadrada;** assim $x^4+4x^2=32$ e $x^4-13x^2=-36$ são equações biquadradas.

A palavra **biquadrada** quer dizer duas vezes quadrada, ou um quadrado de um quadrado, que vem a ser a quarta potencia de uma quantidade; assim o biquadrado de 2 é $2^2\times 2^2=4\times 4=16$; do mesmo modo o biquadrado de a é $a^2\times a^2=a^4$.

Ha varios modos de resolver uma equação biquadrada, mas a mais simples e facil é substituir as potencias x^2 e x^4 da incognita por y e y^2, no que fica o resultado reduzido logo a uma equação do segundo grau; e depois resolve-se esta equação, como já aprendemos no numero **334**.

Problema. Achar o valor de x na seguinte equação biquadrada: $x^4-10x^2=96$.

Solução. Substituindo nesta equação as potencias de x^2 e x^4 por y e y^2,

temos .... $y^2-10y=96$,
quadrando a equação .... $y^2-10y+25=96+25$,
extrahindo a raiz quadrada .... $y-5=\pm 11$,
valor de y .... $y=\pm 11+5$,
ou .... $y=16$ ou -6,
Como $y=x^2$, segue-se que ..... $x^2=16$ ou -6,
$x=\pm 4$ ou $\pm\sqrt{-6}$

Podemos facilmente verificar a exactidão deste resultado, substituindo as duas potencias da incognita pelos respectivos valores:

$x^4=4^4=256$; $10x^2=10\ (4^2)=160$; então $256-160=96$.

Como acabámos de vêr y tem duas raizes ou valores: o positivo 16 e o negativo — 6. De cada um delles poderemos tirar dois valores para x. Com effeito: Si $x^2 = y$.

$$x = \sqrt{y} = \begin{cases} \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ \pm\sqrt{-6} \end{cases}$$

A equação biquadrada apresenta-nos, pois, quatro soluções a saber: $+4$, -4, $+\sqrt{-6}$ e $-\sqrt{-6}$. Num compendio elementar, como o nosso, não trataremos destas duas ultimas. Diremos apenas que taes soluções se chamam *imaginarias* e tiram o nome do facto de serem quaesquer expressões da fórma $\sqrt{-a}$ chamadas *expressões imaginarias*. E' que não ha quantidade de especie alguma, positiva, negativa ou nulla, que, elevada ao quadrado, dê uma expressão da fórma $-a$.

Em todos os nossos exercicios, portanto, indicaremos sómente as soluções *reaes*, assim chamadas em opposição ás imaginarias. As soluções reaes são, de um modo geral, as que se originam do valor positivo de y.

349. As equações que não forem biquadradas, mas tiverem as duas potencias da incognita de modo que o grau da potencia maior seja o dobro do da menor, poderão tambem ser resolvidas por este processo.

Problema. Achar o valor positivo de x na equação $x^6 - 7x^3 = 8$.

Solução. Substituindo x^3 e x^6 por y e y^2, temos a seguinte equação do segundo grau: $y^2 - 7y = 8$. Resolvendo esta equação, como fizemos no problema precedente, temos $y = 8$. Ora como $y = x^3$ segue-se que $x^3 = 8$, e $x = 2$.

Verificação. Desde que $x^6 = 2^6 = 64$, e $7x^3 = 7(2^3) = 56$, segue-se que $64 - 56 = 8$.

Regra. *Para se resolver uma equação biquadrada, substituem-se as potencias* x^2 e x^4 *da incognita por* y *e* y^2, *procede-se depois como uma equação do segundo grau, e na raiz considera-se* $y = x^2$.

Resolver as seguintes equações dando só os valores reaes de x.

1. $x^4 - 8x^2 = 9$. Resp. $x = \pm 3$.
2. $x^4 + 6x^2 = 135$. » $x = \pm 3$.
3. $x^4 - 6x^2 = 160$. » $x = \pm 4$.
4. $x^6 - 8x^3 = 513$. » $x = 3$.
5. $x^4 + 4x^2 = 12$. » $x = \pm\sqrt{2}$.
6. $x^4 - 13x^2 = -36$. » $x = \pm 3$.

RAZÃO E PROPORÇÃO

350. Razão é a relação que ha entre duas quantidades da mesma especie, quando ellas são comparadas na sua grandeza ou no seu valor numerico.

De dois modos podemos comparar duas quantidades homogeneas:

O primeiro modo é achar quanto a quantidade maior excede a menor.

O segundo modo é achar quantas vezes a quantidade menor está contida na maior.

Illustremos este ponto. Se compararmos o numero 12 com o numero 4, pelo primeiro modo, acharemos que 12 excede 8 ao numero 4, porque $12 - 4 = 8$. Este modo de comparar chama-se razão por differença ou simplesmente **differença,** porque se effectua por meio de uma subtracção.

Se compararmos o numero 12 com o numero 4, pelo segundo modo, acharemos que 12 contém 3 vezes o numero 4, porque $12 \div 4 = 3$. Este modo de comparar chama-se razão por quociente ou simplesmente **razão,** porque se effectua por meio da divisão. E' deste ultimo que agora vamos tratar.

351. As duas quantidades comparadas chamam-se termos da comparação. O primeiro termo chama-se **antecedente,** o segundo **consequente,** e o resultado da comparação chama-se **razão.**

A unidade geralmente adoptada como termo de comparação é o segundo termo; de sorte que, para acharmos a razão que ha entre duas quantidades homogeneas, temos de dividir o antecendente pelo consequente. Assim a razão de 6 para 2 é $\frac{6}{2}$ ou 3, isto é, 6 contém 3 vezes o numero 2. A razão de 2 para 6 é $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ isto é, 2 contém $\frac{1}{3}$ de 6.

352. Para indicarmos uma razão, escreveremos o antecedente e depois o consequente separados por dois pontos, como $12:4=3$ que se lê: *a razão de 12 para 4 é igual a 3;* $a:b=c$ que se lê: *a razão de a para b é igual a c.*

353. Uma razão é uma simples divisão, na qual o antecedente é o dividendo, o consequente é o divisor, e a razão é o quociente, como $12:4 = \frac{12}{4} = 3$. Uma razão está, portanto, sujeita ás leis da divisão, expressas nos theoremas das paginas 58 e 59; e por isso *«se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma razão por um mesmo numero, não alteraremos o valor da razão, isto é, do resultado da divisão.*

354. A razão entre duas quantidades póde ser um numero inteiro, mixto ou fraccionario, como succede com um quociente.

1.º Problema. Qual é a razão de $15a$ para $3a$?

Solução. $15a : 3a = \frac{15a}{3a} = 5$

2.º Problema. Qual é a razão de $16x^2$ para $20x$?

Solução. $16x^2 : 20x = \frac{16x^2}{20x} = \frac{4x}{5}$

Regra. *Para se achar a razão entre duas quantidades homogeneas, divide-se o antecedente pelo consequente, e o quociente será a razão.*

Exemplos para resolver:

1. Qual é a razão de $6x^2$ para $2x$? Resp. $3x$.
2. Qual é a razão de $15x$ para 3? » $5x$.
3. Qual é a razão de $20x$ para $5x$? » 4.
4. Qual é a razão de $2a^2$ para $4a$? » $\frac{a}{2}$.
5. Qual é a razão de 26$ para 13$? » ?
6. Qual é a razão de $18abc$ para $6ab$? » ?
7. Qual é a razão de x^2-y^2 para $x+y$? » ?
8. Qual é a razão de $27abc^2d$ para $9c^2$? » ?

355. Uma **razão composta** é o producto de duas ou mais razões.

Assim $\left.\begin{matrix}8:4\\12:3\end{matrix}\right\}=8$ é uma razão composta das razões 8:4 e 12:3.

Problema. Qual é a razão de 8:4 e de 12:3?

Solução. Escreve-se uma razão debaixo da outra; depois multiplicam-se os antecedentes, e o producto é $8\times12=96$; multiplicam-se tambem os consequentes e o producto é $4\times3=12$. A razão resultante é pois $96:12=\frac{96}{12}=8$.

$$\left.\begin{matrix}8:4\\12:3\end{matrix}\right\}=$$
$$8\times12:4\times3$$
$$96\ 12=8$$

Regra. *Para se avaliar uma razão composta, multiplicam-se os antecedentes, e o mesmo se faz com os consequentes e depois acha-se a razão dos dois productos.*

1. Qual é a razão composta de 8:15 e de 25:30? Resp. ?
2. Qual é a razão composta de $a:b$ e de $2b:3ax$? Resp. ?
3. Qual é a razão composta de $ab:b$ e de $bc:bd$? Resp. ?
4. Reduzir a razão de 99:77 aos seus menores termos. » Resp. 9:7.

Proporções

356. Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões. Assim, $a:b=c:d$ é uma proporção que mostra que a razão de a para b é igual a razão de c para d, isto quer dizer que o quociente de a dividido por b é igual ao quociente de c dividido por d.

O signal da igualdade entre duas razões é quatro pontos ::, como $a:b::c:d$, que se lê: **a** *está para* **b**, *assim como* **c** *está para* **d**.

357. Da definição apresentada conclue-se que, se quatro quantidades estiverem em proporção, a primeira dividida pela segunda será igual á terceira dividida pela quarta; de sorte que a proporção $a:b::c:d$ póde ser transformada na equação.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Nota. As palavras *razão* e *proporção* são muitas vezes confundidas uma com a outra na linguagem commum; assim diz-se que duas quantidades estão na proporção de 3 para 4, em vez de na *razão* de 3 para 4. A razão existe entre duas quantidades, e a proporção só existe entre quatro. São necessarias duas razões iguaes para formar uma proporção.

358. As quatro quantidades que formam uma proporção, chamam-se **termos da proporção,** e teem a seguinte ordem:

1.º termo		2.º termo		3.º termo		4.º termo
a	:	b	::	c	:	d

O primeiro termo e o quarto chamam-se **extremos;** e o segundo e terceiro chamam-se **meios.**

O primeiro termo e o terceiro teem tambem o nome de **antecedentes;** e o segundo e o quarto teem o nome de **consequentes.**

Na proporção acima a e d são extremos; b e c são meios; a e c são antecedentes, e b e d são consequentes.

358. Tres quantidades estão tambem em proporção, quando a primeira está na mesma razão para a segunda, assim como a segunda está para a terceira. Os numeros 3, 6 e 12 estão em proporção, porque a razão que ha entre 3 e 6, ha tambem entre 6 e 12.

O termo do meio chama-se **meio** ou **média proporcional** entre os outros dois. Assim, na proporção $a:b::b:c$, o termo b chama-se meio proporcional entre a e c, e o termo c chama-se **terceira proporcional** a a e b, e a proporção chama-se **continua.**

Propriedades principaes das proporções

360. 1.ª Propriedade. *Em toda proporção o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, o quociente do primeiro termo dividido pelo segundo, deve ser igual ao quociente do terceiro dividido pelo quarto.

Multiplicando agora ambos os membros desta equação por bd para a inteirar, temos a (2.ª) equação. Cancellando os factores b e d que são communs, temos a (3.ª) equação que mostra o *producto dos meios igual ao producto dos extremos.*

$$a:b::c:d$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$

$$\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d} \quad (2^a)$$

$$ad=bc \quad (3^a)$$

Podemos demonstrar esta propriedade arithmeticamente, isto é, por meio de algarismos. Dando ás lettras a, b, c e d os valores proporcionaes de 3, 6, 5, e 10, vemos que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.

$$3:6::5:10$$
$$3\times10=6\times5$$
$$30=30.$$

361. Desde que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos, segue-se o seguinte corollario:

Qualquer extremo é igual ao producto dos meios dividido pelo outro extremo; e qualquer meio é igual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio.

Dados pois tres termos de uma proporção, podemos facilmente achar o outro termo. Assim, na proporção $a:b::c:d$,

$$a=\frac{bc}{d},\quad b=\frac{ad}{c},\quad c=\frac{ad}{b}\quad \text{e}\quad d=\frac{bc}{a}.$$

Resolver os seguintes problemas:

1. Os primeiros tres termos de uma proporção são 12, 5 e 24; qual é o quarto termo? Resp. $\frac{5\times24}{12}=10$

2. Os tres primeiros termos de uma proporção são $3ab$, $4a^2b$ e $9ab^2$; qual é o quarto termo? Resp. $12a^2b^2$.

3. Os tres ultimos termos de uma proporção são $4ab^3$, $3a^2b^2$ e $2a^3b$; qual é o primeiro termo? Resp. ?

4. Calcular o valor de x na proporção $a:x::b:c$.

4. Qual o valor de c na proporção $a:8::c:3$?

6. Os tres primeiros termos de uma proporção são ab^2, $2a^2$ e $3ac$; qual é o quarto termo? Resp. ?

362. 2.ª Propriedade. *Se o producto de duas quantidades fôr igual ao producto de outras duas, as quatro quantidades formarão uma proporção, sendo os factores de um producto os meios, e os factores do outro producto os extremos.*

Demonstração. Sejam os dois productos $ad=bc$. Dividindo cada um dos productos por bd, temos a (1.ª) equação. Cancellando os factores d e b que são communs, temos a (2.ª) equação que se transforma na proporção $a:b::c:d$.

$$ad=bc$$

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \quad (1^a)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (2^a)$$

$$a:b::c:d$$

Se tomarmos dois productos numericos e iguaes, e escrevermos os factores de um producto como meios, e os do outro como extremos, teremos ahi uma proporção, como vemos ao lado.

$$5\times8=4\times10$$
$$5:4::10:8.$$

Formar proporções com os seguintes productos:

1. $2\times18=12\times3$. Resp. $2:12::3:18$.
2. $4\times25=5\times20$. » ?
3. $xm=yn$. » ?
4. $ax=by$. » ?
5. $ac=bd$. » ?

363. 3.ª Propriedade. *Em uma proporção continua, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio.*

Demonstração. Na primeira propriedade vimos que o producto dos meios é igual ao producto dos extremos. Então na proporção $a:b::b:c$, $bb=ac$, ou $b^2=ac$, e $b=\sqrt{ac}$.

Daqui concluimos que *a média proporcional entre duas quantidades é igual á raiz quadrada do producto dellas.*

Problema. Qual é a média proporcional entre 4 e 9?

Solução. O producto das duas quantidades é $4\times9=36$ e a raiz quadrada de 36 é 6. O meio é pois 6, e a proporção é $4:6::6:9$.

1. Qual é a média proporcional entre 9 e 16? Resp. 12.
2. Qual é a média proporcional entre 16 e 25? » 20.
3. Qual é a média proporcional entre 25 e 36? » 30.

364. 4.ª Propriedade. *Se quatro quantidades formam proporção, a primeira estará para a terceira, assim como a segunda para a quarta.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a (1.ª) equação. Multiplicando ambos os membros por b e depois cancellando os factores communs, temos a (2.ª) equação.

Dividindo ambos os membros desta equação por c, e cancellando os factores communs, temos a (3.ª) equação que, transformada em uma proporção, mostra que *o primeiro termo está para o terceiro, assim como o segundo está para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1^a)$$

$$a=\frac{bc}{d} \quad (2^a)$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad (3^a)$$

$$a:c::b:d$$

365. 5.ª Propriedade. *Se quatro quantidades formam proporção, a segunda estará para a primeira, assim como a*

quarta está para a terceira.

Demonstração. Já vimos na proporção $a:b::c:d$ que o producto dos meios é igual ao dos extremos (1.ª) equação. Dividindo ambos os membros por a, e cancellando os factores communs, temos a (2.ª) equação. Dividindo ambos os membros desta equação por c, temos a (3.ª) equação que transformada em uma proporção, mostra que o *segundo termo está para o primeiro, assim como o quarto está para o terceiro.*

$$bc = ad \quad (1^a)$$
$$\frac{bc}{a} = d \quad (2^a)$$
$$\frac{bc}{ac} = \frac{d}{c} \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (3^a)$$
$$b:a::d:c.$$

366. 6.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam uma proporção, a somma da primeira e da segunda está para a segunda, assim como a somma da terceira e da quarta está para a quarta.*

Demonstração. Vamos provar que se $a:b::c:d$, então $a+b:b::c+d:d$.

Addicionando á (1.ª) equação uma unidade ou 1, teremos a (2.ª) equação que se modifica na (3.ª) **(n. 150)**. Transformando agora os termos desta equação em uma proporção, vemos que o *primeiro termo mais o segundo estão para o segundo, assim como o terceiro mais o quarto estão para o quarto.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \quad (2^a)$$
$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (3^a)$$
$$a+b:b::c+d:d.$$

366. 6.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, a differença entre a primeira e a segunda está para a segunda, assim como a differença entre a terceira e a quarta está para a quarta.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, tiramos a (1.ª) equação. Subtrahindo 1 em cada membro desta equação, temos a (2.ª) equação que se modifica na (3.ª) **(n. 158)**. Transformando esta equação em uma proporção, vemos que o *primeiro termo menos o segundo está para o segundo, assim como o terceiro menos o quarto está para o quarto.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \quad (2^a)$$
$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (3^a)$$
$$a-b:b::c-d:d.$$

368. 8.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, si os antecedentes, ou os consequentes, ou, ainda, todos os termos, forem multiplicados ou divididos pela mesma quantidade, continúa a existir a proporção.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, deduzimos a (1.ª) equação. Multiplicando ambos os membros por m, temos a (2.ª) equação. Dividindo ambos os membros por n **(n. 162)**, temos a (3.ª). Transformada esta equação em uma proporção, vemos que o *primeiro termo e o terceiro estão multiplicados por* **m**; *e o segundo e quarto por* **n**, *estando na segunda proporção os mesmos termos divididos pelas mesmas quantidades.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{ma}{b} = \frac{mc}{d} \quad (2^a)$$
$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd} \quad (3^a)$$
$$ma:nb::mc:nd.$$
$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{m}:\frac{d}{n}$$

369 9.ª Propriedade. *Se os termos correspondentes de duas ou mais proporções forem multiplicados entre si, os productos continuarão formando proporção.*

Demonstração. Tomando as duas proporções (1.ª) e (2.ª), e multiplicando os seus termos correspondentes, temos a proporção (3.ª).

Transformando as duas primeiras proporções em suas respectivas equações temos (I) e (II).

Multiplicando entre si os termos destas equações, temos a (III) equação.

Transformando esta equação em uma proporção vemos que *os diversos termos são o producto das duas proporções.*

$$a:b::c:d \quad (1^a)$$
$$e:f::g:h \quad (2^a)$$
$$ae:bf::cg:dh \quad (3^a)$$

$$\text{(I)} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{(II)} \quad \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

$$\text{(III)} \quad \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \times \frac{g}{h} \text{ ou } \frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$$
$$ae:bf::cg:dh$$

370. 10.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, suas potencias e raizes do mesmo gráo tambem formam proporção.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a equação (1.ª). Elevando cada uma destas quantidades á potencia n (lettra que representa aqui qualquer expoente de uma quantidade), temos a (2.ª) equação, a qual transformada em uma proporção, mostra *os quatro termos elevados á potencia* n, *e em proporção.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1^a)$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \quad (2^a)$$
$$a^n:b^n::c^n:d^n.$$

Nota. Os alumnos devem verificar numericamente cada uma destas propriedades, como fizemos com a primeira e segunda.

Resolver as seguintes proporções:

1. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+8:x+5$. Resp. $x=4$.
2. Achar o valor de x na proporção $x+4:2x+8::2x-1:3x+2$. Resp. $x=4$.
3. Achar o valor de x na proporção $3x+2:x+7::9x-2:5x+8$. Resp. $x=2$ ou $2\frac{1}{2}$
4. Se 3, x e 1083 formam uma proporção continua, qual é o valor de x? Resp. 57.
5. Se 9, x e 49 formam uma proporção continua, qual é o valo; de x? Resp. ?

PROGRESSÕES

371. Progressão é uma série de numeros que crescem ou decrescem em uma certa ordem ou razão.

Ha duas sortes de progressões denominadas:

1.ª Progressão arithmetica ou por differença;
2.ª Progressão geometrica ou por quociente.

Progressão arithmetica

372. A progressão arithmetica é uma série de numeros que crescem ou decrescem de uma quantidade constante chamada *razão;* isto é, cada numero é formado do seu antecedente com o accrescimo ou diminuição dessa quantidade.

373. Se os termos vão crescendo do primeiro para o ultimo, a progressão chama-se **crescente,** mas se vão diminuindo, chama-se **decrescente.**

Em uma série crescente, sendo a o primeiro termo com o valor de 20, e d a differença commum com o valor de 3, temos

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, etc.
20, 23, 26, 29, 32, 35, etc.

Se a série fôr decrescente, temos

a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$, $a-4d$, $a-5d$, etc.
20, 17, 14, 11, 8, 5, etc.

374. Os numeros que formam uma série, chamam-se **termos,** o primeiro e o ultimo chamam-se **extremos,** e os intermediarios chamam-se **meios,** e a differença que ha entre elles, ou razão, tambem se chama **differença commum.** Assim na série

5, 9, 13, 17, 21, 25.

5 e 25 são os extremos; 9, 13, 17 e 21 são os meios; 4 é a differença commum, e 6 é o numero de termos.

375. Em cada progressão arithmetica temos de considerar cinco quantidades que são:

1.ª *O primeiro termo* . . . a
2.ª *O ultimo termo* . . . u
3.ª *A differença commum* . . . d
4.ª *O numero de termos* . . . n
5.ª *A somma de todos os termos* . . . s

Ha tal relação entre estas cinco quantidades que, sendo conhecidas sómente tres, podemos facilmente achar as outras duas.

Conhecendo o primeiro termo, a differença commum e o numero de termos, achar o ultimo termo

376. Dando-se o primeiro termo a, a differença commum d e o numero de termos n, qual é o ultimo termo u?

Solução. Em uma série crescente cada termo se fórma do seu antecedente junto com a differença commum, como

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, etc.

Nesta série vemos que, em cada termo, o coefficiente de d é 1 menos do que o numero da ordem desse termo na série; pois no segundo termo

o coefficiente de d é 1 subentendido; no terceiro termo é 2; no quarto termo é 3, etc. Então o ultimo deve ser igual a a mais a differença commum, multiplicada pelo numero de termos menos 1.

Fórmula: $u=a+d(n-1)$

Está fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *O ultimo termo é igual ao primeiro termo mais o producto da differença commum multiplicada pelo numero de termos menos* 1.

Se a série fôr decrescente, multiplica-se a differença commum pelo numero de termos menos 1, *e o producto subtrahe-se do primeiro termo.*

Resolver os seguintes problemas:

1. O primeiro termo de uma série crescente é 3, e a differença commum é 2; qual é o quarto termo? Resp. $u=3+2(4-1)=9$.

2. Achar o sexto termo de uma série decrescente, sendo 30 o primeiro termo, e 2 a differença commum. Resp. $30-2(6-1)=20$.

3. Numa série crescente, sendo 11 o primeiro termo, e 6 a differença commum, qual é o decimo segundo termo? Resp. 77.

4. Qual é o decimo quinto termo da série 1, 6, 11, 16, 21, etc.? Resp. 71.

5. Qual é o centesimo termo da série 1, 7, 13, 19, 26, etc.? Resp. 595.

6. Qual é o 25º termo da série x, $3x$, $5x$, $7x$, etc.? Resp. $49x$.

Achar a somma de todos os termos

377. Dando-se o primeiro termo a, a differença commum d e o numero de termos n, achar a somma de todos os termos representada por s.

Solução. Tomando uma série de 5 termos na ordem crescente, e a mesma série na ordem decrescente, começando com o ultimo termo (u), e sommando as duas séries, temos

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)$$
$$s=u+(u-d)+(u-2d)+(u-3d)+(u-4d)$$
$$2s=a+u+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)$$

ou $2s=(a+u)$ tomado tantas vezes quantos são os termos da série. Ora como o numero de termos é representado pela lettra n, segue-se que $2s=(a+u)n$, e $s=(a+u)n$ dividido por 2.

Fórmula: $s=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *A somma de todos os termos é igual á metade da somma do primeiro e do ultimo multiplicada pelo numero de termos.*

1. Achar a somma de todos os termos da série 1, 2, 3, 4, 5, etc. até 25.

Solução. Somma $= \left(\frac{1+25}{2}\right) \times 25 = 325.$

2. Sendo o primeiro termo de uma série 2, o ultimo termo 50, e o numero de termos 17, qual é a somma de todos os termos? Resp. 442.

3. O primeiro termo é 10, o ultimo é 20, e o numero de termos é 6; qual é a somma da série? Resp. 90.

4. O primeiro termo é $\frac{1}{2}$ o ultimo termo é 30, e o numero de termos é 50; qual é a somma da série inteira? Resp. ?

5. Dar a somma da série 2, 5, 8, 11, até o termo 20.º. Resp. ?

378. As duas fórmulas que acabámos de expôr, chamam-se **fundamentaes**, porque nos offerecem duas equações que resolvem este problema geral:

«Conhecidas tres das cinco quantidades a, d, n, u, e s, que entram em uma progressão arithmetica, determinar as outras duas.»

(1.ª Equação fundamental)	(2.ª Equação fundamental)
$u=a+d(n-1)$	$s=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

Para acharmos o valor de a, que é o primeiro termo da série, quando são conhecidos o ultimo termo, o numero de termos e differença commum, transporemos na 1.ª equação a lettra a para o primeiro membro, e a lettra u para o segundo, como se vê na equação ao lado.

$$a=u-d(n-1)$$

379. Para acharmos o valor de d, que é a differença commum, conhecendo u, a e n transporemos na 1.ª equação a lettra d para o primeiro membro e a lettra u para o segundo, como se vê na fórmula ao lado.

$$d(n-1)=u-a$$
$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

380. Para acharmos o valor de n, que é o numero dos termos, conhecendo s, a e u, faremos na 2.ª equação a transposição que vemos ao lado (Vêde n.º **178**).

$$2s=n(a+u)$$
$$n(a+u)=2s$$
$$n=\frac{2s}{u+a}$$

Deste modo podemos achar facilmente qualquer das cinco quantidades de uma progressão, sendo tres dellas conhecidas.

Inserir qualquer numero de meios arithmeticos entre dois termos dados

381. Conforme vimos na secção antecedente, a fórmula para acharmos a differença commum dos termos é a que está ao lado, e que quer dizer: *Em qualquer progressão arithmetica a differença commum é igual á differença dos extremos dividida pelo numero de termos menos* 1.

$$d=\frac{u-a}{n-1}$$

Se quizermos, por exemplo, inserir cinco meios entre 3 e 15, temos de achar primeiro a differença commum dessa série. Ora os extremos são 3 e 15; o numero de termos inseridos com os dois extremos são 5+2=7, então a differença commum é 2, como vemos na operação ao lado; e a série é

$$\frac{15-3}{7-1}=2$$

3, 5, 7, 9, 11, 13, **15**.

382. E' evidente que, se inserirmos o mesmo numero de meios entre termos consecutivos de uma progressão arithmetica, o resultado formará uma nova progressão. Assim, se inserirmos tres termos entre os termos consecutivos da progressão 1, 9, 17, etc., a nova série será **1**, 3, 5, 7, **9**, 11, 13, 15, **17**, e assim por diante.

Resolver os seguintes problemas:

1. Inserir tres termos entre 5 e 7.

Solução. $\frac{7-5}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Sendo a razão $\frac{1}{2}$ a série é 5, $5\frac{1}{2}$ 6, $6\frac{1}{2}$, 7

2. Inserir 5 meios arithmeticos entre **14** e 16. Resp. $14\frac{1}{3}$, $14\frac{2}{3}$, 15 $15\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{3}$.

3. Achar 9 meios arithmeticos entre 2 e 32. Resp. 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

4. Achar 6 meios arithmeticos entre 1 e 50. Resp. ?

5. O primeiro termo de uma progressão crescente é 5; o ultimo termo é 50, e a somma de todos os termos é 275; qual é o numero de termos? Resp. 10.

6. O primeiro termo de uma progressão crescente é 4; o ultimo termo é 32, e o numero de termos é 8; qual é a differença commum? Resp. 4.

7. O ultimo termo de uma progressão crescente é 50; a differença commum é 5, e o numero de termos é 10; qual é o primeiro termo? Resp. 5.

8. Cem pedras estando collocadas em linha recta com a distancia de 2 metros uma da outra, quanto teria de andar a

pessôa que tivesse de recolher todas as pedras uma a uma, em um cesto posto a 2 metros de distancia da primeira pedra?

Resp. 20200^m.

Nota. A pessôa que recolher as pedras tem de andar 2 vezes a distancia entre o cesto e a pedra; uma quando vai buscar a pedra, e a outra quando a traz, e por isso a differença commum é 2 vezes 2 metros = 4 metros, e por isso o primeiro termo é 4 metros.

9. Um estudante comprou 7 objectos, cujos preços formavam uma progressão arithmetica. O preço do objecto mais barato foi $500, e o preço do mais caro foi 2$300. Achar os preços dos outros objectos.

Resp. $800, 1$100, 1$400, 1$700 e 2$000.

10. Se o primeiro termo de uma progressão crescente é 5, a differença commum é 3, e o numero de termos é 15, qual é o ultimo termo? Resp. ?

11. Em uma série crescente, 11 é o primeiro termo, 6 é a differença commum; qual é pois o vigesimo termo da progressão? Resp. 125.

12. Achar a somma da série 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., até 1000 termos. Resp. 500500.

Progressão geometrica

383. Progressão geometrica é uma série de numeros, cada um dos quaes é um certo numero de vezes maior ou menor do que o seu antecedente.

Série crescente:	1,	3,	9,	27,	81,	243,	etc.
Série decrescente:	96,	48,	24,	12,	6,	3,	etc.

384. O numero de vezes que cada termo da progressão geometrica vai crescendo ou diminuindo chama-se **razão commum.**

A razão commum póde ser inteira ou fraccionaria. Quando a razão é uma fracção, a série é decrescente, porque a multiplicação de uma quantidade positiva, qualquer que ella seja, por uma fracção dá sempre um producto inferior ao multiplicando. Assim na série crescente acima, a razão commum é 3, e na decrescente é $\frac{1}{2}$.

385. Em cada progressão geometrica, cada termo é formado pelo seu antecedente multiplicado pela razão.

386. Em uma série geometrica, temos de considerar cinco quantidades que são:

1.ª *O primeiro termo*. a
2.ª *O ultimo termo*... u
3.ª *A razão commum*. r
4.ª *O numero de termos*. n
5.ª *A somma de todos os termos*........ s

Ha tal relação entre estas 5 quantidades que, conhecidas 3 dellas, podemos facilmente achar as outras duas.

Achar qualquer termo de uma progressão geometrica

387. Dando-se o primeiro termo representado por a, o numero de termos representado por n, e a razão commum representada por r, achar o ultimo termo representado por u.

Solução. Sendo a o primeiro termo, e cada termo da progressão formado do seu antecedente multiplicado pela razão, segue-se que a série deve ser

$$a, \ ar, \ ar^2, \ ar^3, \ ar^4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ ar^{n-1}$$

Examinando o expoente de r, vemos que no segundo termo é 1, no terceiro é 2, no quarto é 3, no quinto é 4, isto é, 1 menos que o numero da ordem do termo, de sorte que no ultimo termo, o expoente de r deve ser 1 menos que o numero de termos, isto é, ar^{n-1}. Daqui temos a

Fórmula: $u = ar^{n-1}$

Esta fórmula traduzida em linguagem commum dá a seguinte regra:

Regra. *O ultimo termo de uma progressão geometrica é igual ao producto do primeiro termo multiplicado pela potencia da razão cujo expoente seja 1 menos do que o numero de termos.*

1. Achar o sexto termo de uma progressão geometrica, em que o primeiro termo é 3, e a razão commum é 2.

Solução. $u = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96.$

2. O primeiro termo de uma progressão geometrica é 4, e a razão commum é 3; qual é o setimo termo? Resp. 2916.

3. O primeiro termo é 5, a razão commum é 4; qual é o termo oitavo? Resp. 81920.

4. O primeiro termo é 7, a razão commum é 2; qual é o termo decimo? Resp. 3584.

5. Se um negociante, começando com 5 contos, dobrasse o seu capital cada cinco annos, quanto teria elle no fim de vinte annos? Resp. 80 contos.

Achar a somma de todos os termos de uma progressão geometrica

388. Dando-se o primeiro termo a, a razão commum r, e o numero de termos n, achar a somma dos termos s.

Solução analytica. Se multiplicarmos qualquer série geometrica pela sua razão (r), o resultado será uma nova série na qual cada termo, excepto o ultimo terá um termo correspondente na primeira série. Observemos estas duas séries

$$\text{Série} \quad s = a + ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots\ldots \ ar^{n-1}$$
$$\text{Série} \times r = rs = \quad ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots\ldots \ ar^{n-1} + ar^n$$

Notamos aqui que os termos das duas séries são identicos, excepto o primeiro termo da primeira série, e o ultimo termo da segunda. Se agora subtrahirmos a primeira série da outra que foi multiplicada por r, todos os termos do meio desapparecerão, restando sómente os dois extremos, isto é, ar^n-a; então temos

$$rs-s=ar^n-a$$
$$s(r-1)=ar^n-a$$
$$\text{ou } s=\frac{ar^n-a}{r-1}.$$

Já vimos (n. 387) que $u=ar^{n-1}$; multiplicando ambos os termos desta igualdade por r, temos $ur=ar^n$. Substituindo no valor de s a quantidade ar^n por ur, temos a

Fórmula: $s=\dfrac{ur-a}{r-1}$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. *Para se achar a somma dos termos de uma progressão geometrica, multiplica-se o ultimo termo pela razão, do producto subtrahe-se o primeiro termo, e o resto divide-se pela razão menos 1.*

1. Achar a somma de uma progressão geometrica cujo primeiro termo é 4, a razão é 3, e o ultimo termo 2916.

Solução. $\dfrac{(2916\times3)-4}{3-1}=4372.$

2. Achar a somma de uma progressão geometrica, na qual o primeiro termo é 7, a razão é 2, e o ultimo termo é 3584. Resp. 7161.

3. Sendo o primeiro termo de uma progressão geometrica 5, a razão 4, e o ultimo termo 81920, qual é a somma dos termos dessa progressão? Resp. 109225.

4. Achar a somma de 7 termos da progressão 1, 2, 4, 8, etc. Resp. 127.

5. Achar a somma de 10 termos da progressão 4, 12, 36, etc. 118096.

6. Achar a somma de 9 termos da progressão 5, 20, 80, etc. Resp. 436905.

Achar a média geometrica entre dois numeros

389. Para acharmos média geometrica entre dois numeros, examinemos a progressão de tres quantidades.

$$a,\quad ar,\quad ar^2$$

Multiplicando os dois extremos, vemos que o producto é $a\times ar^2=a^2r^2$, e que o quadrado do meio é $(ar)^2=a^2r^2$, isto é, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio.

Daqui temos a seguinte regra:

Regra. *Para se achar a média geometrica entre dois numeros multiplicam-se esses numeros, e extrahe-se a raiz quadrada do producto.*

1. Achar a média geometrica entre 4 e 9.

Solução. $\sqrt{4\times9}=6$

2. Achar a média geometrica entre 4 e 25. Resp. ?
3. Achar a média geometrica entre 9 e 16. » ?
4. Achar a média geometrica entre $4a$ e $49a$. » $14a$.
5. Achar a média geometrica entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ » $\frac{1}{2}$.

Problemas variados para o exame

1. Reduzir $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ á sua expressão mais simples. Resp. $\dfrac{a-b}{a+b}$.

2. Achar o valor de x na equação $x+\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=\frac{3x}{7}+53$. Resp. $x=105$.

3. Resolver a equação $2x+\frac{ax-b}{3}=x-a$. Resp. $x=\dfrac{b-3a}{a+3}$.

4. Ha dois numeros cuja somma é 37, e se tres vezes um delles fôr subtrahido de quatro vezes o outro e esta differença fôr dividida por 6, o quociente será 6. Quaes são os numeros? Resp. 16 e 21.

5. Achar os valores de x e y nas seguintes equações simultaneas: $2x+7y=65$ e $6x-2y=34$. Resp. $x=8$, $y=7$.

6. Achar os valores de x, y e z no seguinte systema de equações: $2x+6y+5z=93$, $4x+3y+8z=95$ e $5x+4y+9z=116$. Resp. $x=7$, $y=9$, $z=5$.

7. Elevar $m-n$ á quinta potencia por meio do binomio de Newton. Resp. $m^5-5m^4n+10m^3n^2-10m^2n^3+5mn^4-n^5$.

8. Qual é a raiz quadrada de 178929? Resp. 423.

9. Reduzir o radical $\sqrt{486a^2b^4x^5}$ á sua fórma mais simples. Resp. $9ab^2x^2\sqrt{6x}$

10. Achar o valor de x na equação $x^2+6x=27$. Resp. $x=+3$ ou -9.

11. Resolver a equação $x+\sqrt{x^2-3x+60}=12$. Resp. $x=4$.

12. Formar uma equação completa do segundo grau, cujas raizes sejam 5 e 6. Resp. $x^2-11x=-30$.

13. Dividir o numero 33 em duas partes de sorte que o seu producto seja 162. Resp. 27 e 6.

14. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+8:x+5$. Resp. $x=4$.

15. Achar o oitavo termo de uma progressão geometrica cujo primeiro termo seja 5, e a razão commum 4.
Resp. 81920.

16. Decompôr a expressão trinomia $x^2+6x-27$ em dois factores binomios. Resp. $(x-3)\ (x+9)$.

17. A somma dos quadrados de dois numeros é 260, e a differença desses quadrados é 132; quaes são os numeros?
Resp. ± 8 e ± 14.

18. Um negociante comprou 3 peças de seda, que sommavam 111 metros. A segunda peça tinha 11 metros mais do que a primeira, e a terceira tinha 17 metros mais do que a segunda; quantos metros tinha cada uma?
Resp. 1.ª=24, 2.ª=35, 3.ª=52.

19. Achar dois numeros cuja somma seja 16, e a somma dos seus quadrados seja 130. Resp. 7 e 9.

20. Um fazendeiro empregou na colheita do café 5 homens e 4 rapazes; no fim do primeiro dia de trabalho, pagou lhes o jornal que importou em 10$500; no segundo dia empregou 8 homens e 6 rapazes, e pagou-lhes na mesma razão, importando o salario em 16$500; qual foi o jornal de cada homem, e de cada rapaz? Homem 1$500, rapaz, $750.

21. Na Noruega foi pescado um bacalhau cujo rabo pesava 9 kilos; a cabeça pesava tanto como o rabo e metade do corpo, e o corpo pesava tanto como o rabo e a cabeça; quanto pesava o peixe? Resp. 72 kilos.

22. Simplificar a expressão $5a^2+3mn-(2a^2-mn-b)$.
Resp. $3a^2+4mn+b$.

23. Quando Dante viu a Beatriz pela primeira vez, tinha 8 annos mais do que ella, e ella tinha $\frac{5}{7}$ da idade delle; quaes eram as suas idades? Resp. ?

FIM